وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية بجاية
ثانوية الشهداء السبعة بوعيفل

السنــة الدراسيــة :
2018/2019
الأستاذة: بن صافية
الشعبة : علوم تجريبية
المـــدة : ساعتان

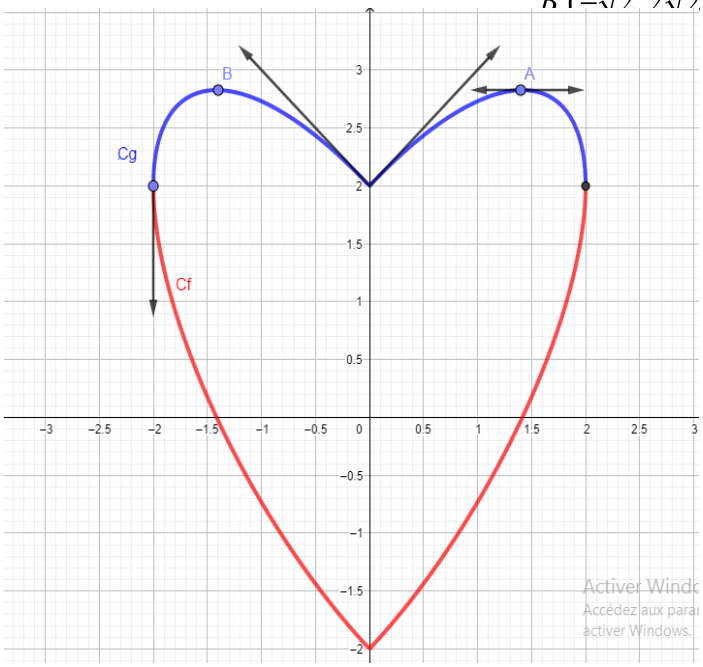
اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول ☺ (5 نقاط)

f و g الدالتان المعرفتان على $[-2;2]$ بـ: $g(x)=|x|+\sqrt{4-x^2}$ و $f(x)=|x|-\sqrt{4-x^2}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاتها البيانية في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ،كما هو موضح في الشكل المقابل(الشكل1).

تعطى النقطتين A و B من (C_g) حيث: $A(\sqrt{2};2\sqrt{2})$ و $B(-\sqrt{2};2\sqrt{2})$



1) بقراءة بيانية، أجب عن الأسئلة التالية:

a) عين: $g'(\sqrt{2})$ ، و استنتج: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(\sqrt{2}+h)-g(\sqrt{2})}{h}$

b) عين: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ ، ماذا تستنتج؟.

c) عين اشارة $g'(x)$ على المجال $[-2;2]$.

2) باستعمال عبارة الدالة f أجب عن الأسئلة التالية:

a) أحسب: $f(0)$.

b) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ،فسر النتيجة بيانيا.

3) نعرف الدالة k كما يلي: $k(x)=\sqrt[3]{g(x)}$.

a) برّر لماذا مجموعة تعريف الدالة k هي: $D_K=[-2;2]$

b) أحسب $k'(x)$ ، و شكل جدول تغيرات الدالة k .

التمرين الثاني ☺ (9 نقاط)

I)- g دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج إشارة الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

II)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) أ)- أوجد نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج؟ .

ب)- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

جـ) - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

2) أ) - تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب) - استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

اقلب الصفحة

جـ) - اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$.

3) أثبت أن المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

4) ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T) .

5) ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة: $(m-1)x - 1 = \frac{\ln x}{x}$ ، حيث m وسيط حقيقي.

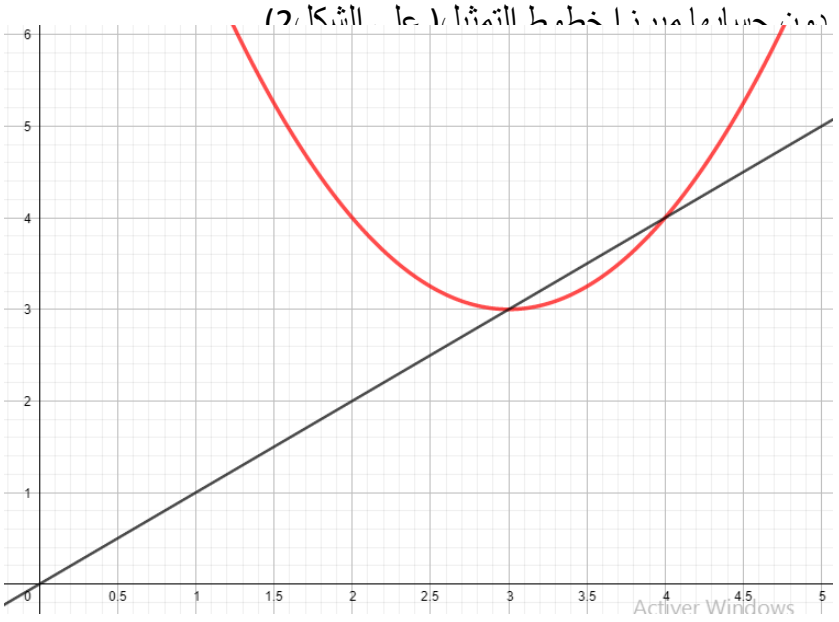
التمرين الثالث ☺ (6 نقاط)

في الشكل المقابل (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0,5]$ بالعلاقة: $f(x) = (x-3)^2 + 3$

و (D) المستقيم الذي معادلته : $y = x$ (الشكل2).

1) (U_n) متتالية معرفة على ¥ كمايلي: $U_0 = \frac{15}{4}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ)- مثل على محور الفواصل الحدود: U_3, U_2, U_1, U_0 دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل على الشكل (2)



ب)- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

2) أ)- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3 \le U_n \le 4$

ب)- بين أن: $U_{n+1} - U_n = (U_n - 3)(U_n - 4)$

ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (U_n) .

3) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على ¥ بالعلاقة : $V_n = \ln(U_n - 3)$

أ)- برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول V_0 .

Activer Windows

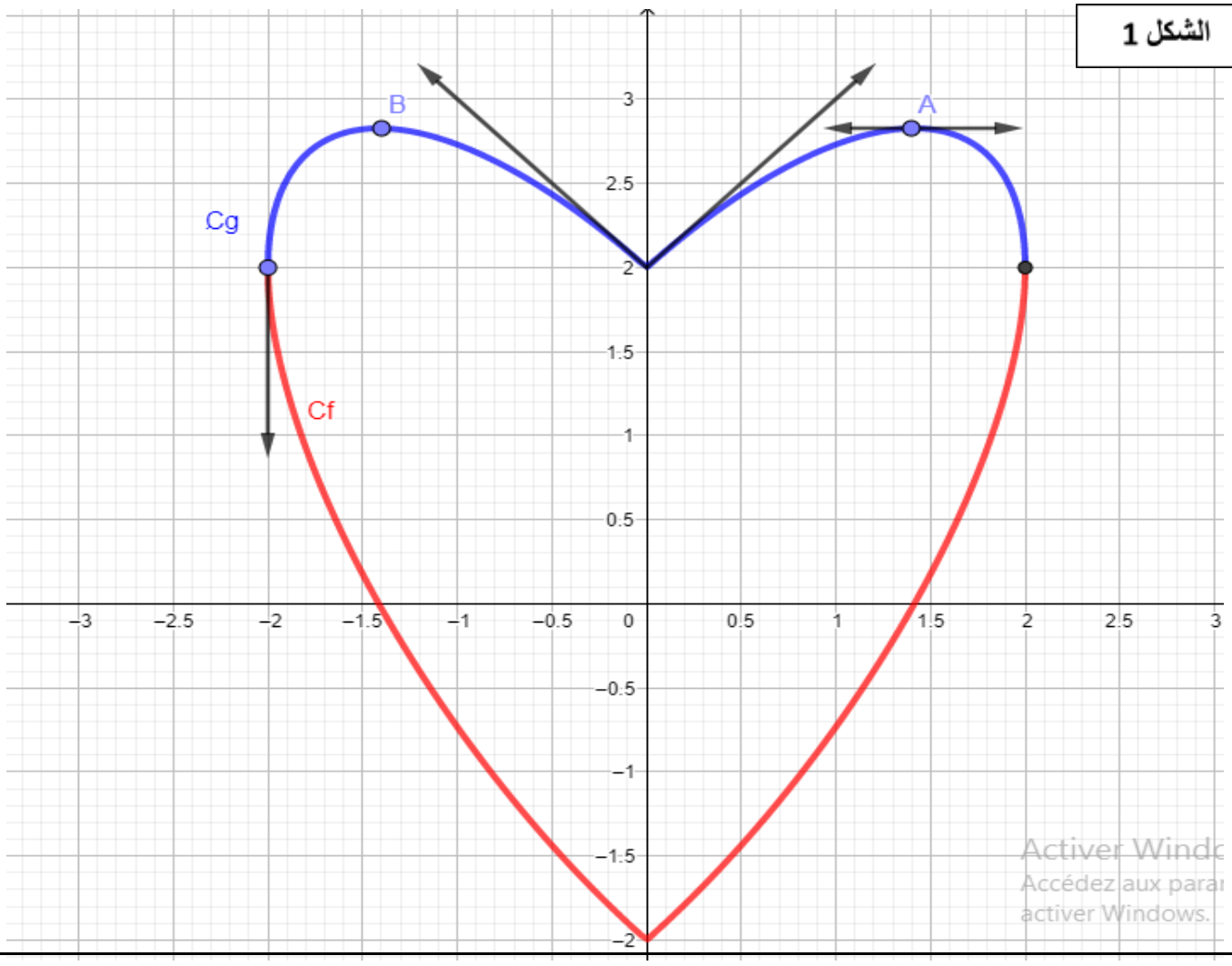
ب)- أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n .

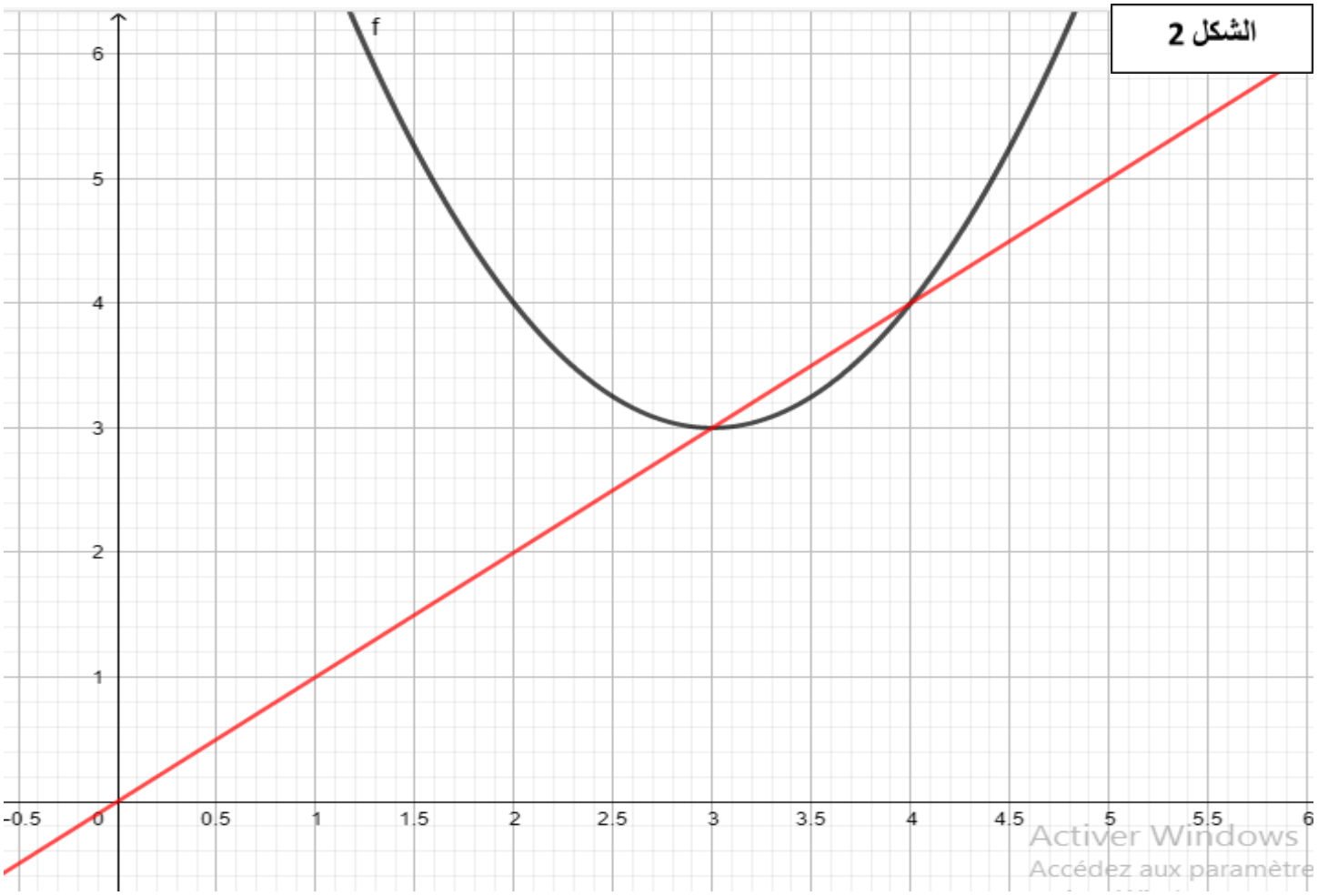
ج) - أحسب بدلالة بدلالة n المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ ،

ثم استنتج الجداء: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3).....(u_n - 3)$.

أستاذتكم تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح – بن صافية-

الشكل 1





ملاحظة: يعاد الشكل 2 مع ورقة الإجابة

الإجابة المقترحة:

التمرين الأول:

a) تعيين: $g'\left(\sqrt{2}\right)$ ، و استنتاج:

$\lim_{h\to 0}\dfrac{g\left(\sqrt{2}+h\right)-g\left(\sqrt{2}\right)}{h}$:

$g'\left(\sqrt{2}\right)=0$ (المماس عند A موازي لحامل محور الفواصل)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g\left(\sqrt{2}+h\right)-g\left(\sqrt{2}\right)}{h}=g'\left(\sqrt{2}\right)=0$$

b) تعيين: $\lim_{x\to 0^{<}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ و $\lim_{x\to 0^{>}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ و

$\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$:

$\lim_{x\to 0^{<}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{3-2}{-1-0}=-1$ (معامل توجيه نصف المماس على يسار 0)

$\lim_{x\to 0^{>}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{3-2}{1-0}=1$ (معامل توجيه نصف المماس على يمين 0)

$\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=-\infty$ (المماس عند (-2) موازي لمحور التراتيب، منه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند (-2))

c) تعيين اشارة $g'(x)$ **على المجال** $[-2;2]$:

الدالة g متزايدة تماما على كل من المجالين : $\left[-2;-\sqrt{2}\right]$ و $\left[0;\sqrt{2}\right]$ و متناقصة تماما على كل من المجالين: $\left[-\sqrt{2};0\right]$ و $\left[\sqrt{2};2\right]$. منه:

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

باستعمال عبارة الدالة f **أجب عن الأسئلة التالية:**

a) حساب $f(0)$:

$$f(0)=|0|-\sqrt{4-0^2}=-2$$

b) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f **عند 0 :**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-\sqrt{4-x^2}+2}{x}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^{<}}\dfrac{-x-\sqrt{4-x^2}+2}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{x-\sqrt{4-x^2}+2}{x}=1\end{cases}$$

تفسير النتيجة بيانيا:

الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند (0)، لكنها قابلة للإشتقاق على يمين الـ "0" و على يسار الـ "0". تقبل نصفي مماسين معامل توجيههما (-1) و (1) ، يشكلان نقطة زاوية.

2) نعرف الدالة k **كما يلي:** $k(x)=\sqrt[3]{g(x)}$.

a) تبريّر لماذا مجموعة تعريف الدالة k **هي:** $D_K=[-2;2]$:

$$D_K=\left\{x\in\mathbb{R}/\,g(x)\geq 0\right\}=[-2;2]$$

(الدالة g موجبة تماما للأن تمثيلها البياني يقع فوق محور الفواصل)

b) حساب $k'(x)$:

لدينا: $k(x)=\sqrt[3]{g(x)}=\left(g(x)\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}\ln(g(x))}$

منه: $\boxed{k'(x)=\frac{1}{3}\times\frac{g'(x)}{g(x)}e^{\frac{1}{3}\ln(g(x))}}$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة k :

بما أن: $e^{\frac{1}{3}\ln(g(x))}>0$ و : $g(x)>0$ فإن اشارة $k'(x)$ من إشارة $g'(x)$.

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
$k'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$k(x)$									

التمرين الثاني ☺

g دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

أ)- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+1-\ln(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=+\infty$$

$+1-\ln(x)=+\infty$

ب)- الدالة المشتقة:

$$g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$$

ج)-اشارتها:

$x>0$ منه اشارة $g'(x)$ من اشارة $2x^2-1$.

$2x^2-1=0$ معناه: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو: $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

x	o	$1/\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$

د)- اتجاه التغير: g دالة متناقصة تماما على المجال: $\left]0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ و متزايدة تماما على المجال: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[$.

ه)- جدول التغيرات:

x	o	$1/\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$ $\quad$ $+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}+\ln\left(\sqrt{2}\right)$	$+\infty$

2) استنتاج إشارة الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

x	o	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	

II)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كالتالي :

$f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$.

6) أ)- ايجاد نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}=+\infty$

(لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ و $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$)

نستنتج أن: (C) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته:

$x=0$.

ب)- **أثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) :**

لدينا:

$$f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

منه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

جـ) **– دراسة الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) :**

لدينا: $f(x)-y=\frac{\ln(x)}{x}$ و بما أن: $x>0$ فان اشارة $f(x)-y$ من اشارة $\ln(x)$

x	o	1	$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	$+$

الوضع النسبي بالنسبة إلى	

7) أ) - التحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$:

لدينا: $f'(x)=1+\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln(x)}{x^2}$

منه: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) - استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$:

بما أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و $x^2>0$ و $g(x)>0$ فإن:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $-\infty$

جـ) - كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$:

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=2(x-1)+\frac{3}{2}$$
$$y=2x-\frac{1}{2}$$

8) اثبات أن المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$:

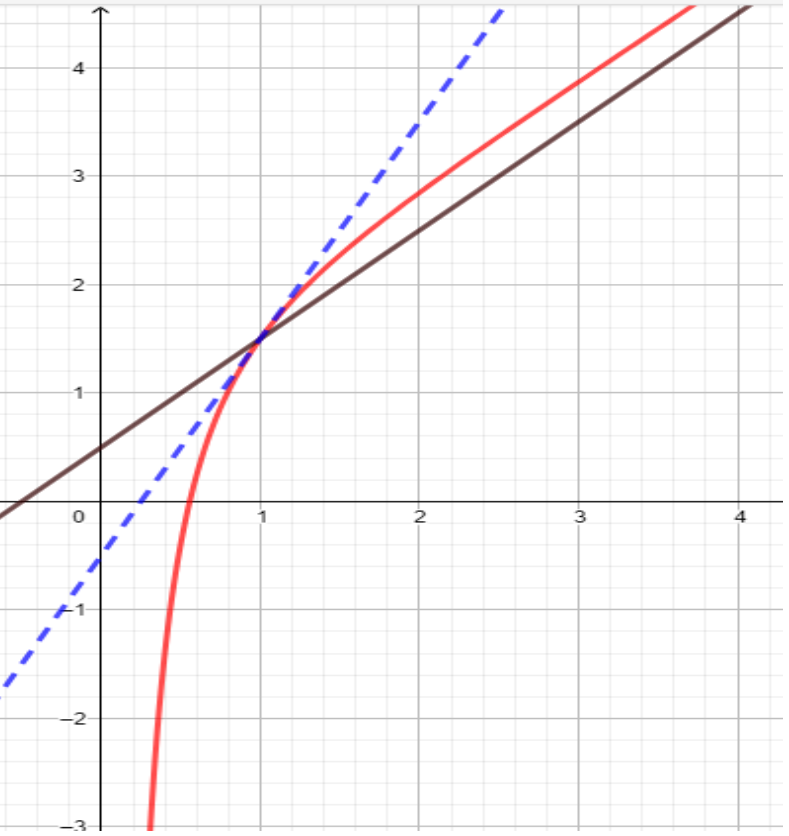
الدالة f مستمرة و رتيبة(متزايدة تماما) على المجال $]0;+\infty[$

و $f\left(\frac{1}{2}\right)=-0.38$ ، $f(1)=1.5$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$ منه المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

9) رسم المنحنى (C) و المستقيمين (Δ) و (T) :



10) مناقشة عدد حلول المعادلة: $(m-1)x-1=\frac{\ln x}{x}$:

$(m-1)x-1=\frac{\ln x}{x}$ تكافئ: $mx-x-1=\frac{\ln x}{x}$ أي:

و باضافة $\frac{1}{2}$ الى الطرفين نجد: $mx-1=\frac{\ln x}{x}+x$

(مناقشة دورانية). $f(x)=mx-\frac{1}{2}$

حلول المعادلة: $(m-1)x-1=\frac{\ln x}{x}$ هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة: $y=m\,x-\frac{1}{2}$.

لتكن $A(x_0;y_0)$ نقطة من (Δ_m) منه:

$y_0 = mx_0 - \frac{1}{2}$ أي: $m\,x_0 - \frac{1}{2} - y_0 = 0$ اذن:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

.



التمرين الثالث ☺ (U_n) متتالية معرفة على ¥ كمايلي:

$U_0 = \frac{15}{4}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ)- تمثيل الحدود: U_3, U_2, U_1, U_0 :

ب)- التخمين:

نلاحظ أن: $U_3 \text{ p } U_2 \text{ p } U_1 \text{ p } U_0$ منه المتتالية (U_n) متناقصة تماما على ¥ .

2) أ)- البرهان بالتراجع: $P(n)$:" من اجل كل عدد طبيعي n : $3 \text{ p } u_n \text{ p } 4$ "

التحقق: من صحة $P(0)$

لدينا: $U_0 = \frac{15}{4} = 3,75$ منه: $3 \text{ p } u_0 \text{ p } 4$.

الفرضية: نفرض أن: $P(n)$ صحيحة. أي: من اجل كل عدد طبيعي n : $3 \text{ p } u_n \text{ p } 4$

البرهان: نبرهن أن: $P(n+1)$ صحيحة. أي: من اجل كل عدد طبيعي n : $3 \text{ p } u_{n+1} \text{ p } 4$.

لدينا: من اجل كل عدد طبيعي n : $3 \text{ p } u_n \text{ p } 4$ و:

$U_{n+1} = f(U_n)$

اذن: $3-3 \text{ p } u_n - 3 \text{ p } 4-3$ أي: $0 \text{ p } u_n - 3 \text{ p } 1$

بتربيع الطرفين و اضافة 3 الى الأطراف نجد:

$0^2 + 3 \text{ p } (u_n - 3)^2 + 3 \text{ p } 1^2 + 3$

و بالتالي: $3 \text{ p } u_{n+1} \text{ p } 4$. حسب **مبدأ الإستدلال بالتراجع** الخاصية $P(n)$ صحيحة. أي: من اجل كل عدد طبيعي n : $3 \text{ p } u_n \text{ p } 4$.

ب)- تبيان أن: $U_{n+1} - U_n = (U_n - 3)(U_n - 4)$:

لدينا:

$$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = (U_n - 3)^2 + 3 - U_n$$
$$= U_n^2 - 7U_n + 12 = (U_n - 3)(U_n - 4)$$

استنتاج إتجاه تغير المتتالية (U_n) :

ندرس اشارة: $U_{n+1} - U_n$ لدينا:

$$U_{n+1} - U_n = (U_n - 3)(U_n - 4)$$

U_n	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$U_{n+1} - U_n$		+	--	+

و بما أن: $3 \text{ p } u_n \text{ p } 4$ فإن: المتتالية (U_n) متناقصة تماما على ¥ .

3) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على ¥ بالعلاقة :

$$V_n = \ln(U_n - 3)$$

أ)- البرهان أن (V_n) **متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول** V_0 :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\ln(U_{n+1} - 3)}{\ln(U_n - 3)} = \frac{\ln\left((U_n - 3)^2 + 3 - 3\right)}{\ln(U_n - 3)}$$
$$= \frac{2\ln(U_n - 3)}{\ln(U_n - 3)} = 2$$

منه: (V_n) متتالية هندسية اساسها 2 و حدها الأول

$$V_0 = \ln(U_0 - 3) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

.

ب)- كتابة V_n **بدلالة** n **ثم استنتاج عبارة** U_n :

$V_n = V_0 \times q^n = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \times 2^n$ ، و بما أن: $V_n = \ln(U_n - 3)$

فإن: $e^{V_n} = U_n - 3$

أي: $U_n = e^{V_n} + 3 = e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right) \times 2^n} + 3$

ج) - حساب المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ **:**

$$S_n = V_0\left(\frac{1-q}{1-q}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)\left(2^{n+1}-1\right)$$

استنتاج الجداء: $P_n = (u_0-3)(u_1-3)(u_2-3).....(u_n-3)$ **:**

لدينا: $e^{V_n} = U_n - 3$ أي: $e^{V_0} = U_0 - 3$ ،

$e^{V_1} = U_1 - 3$ ،.....

منه:

$$\begin{aligned} P_n &= (u_0-3)(u_1-3)(u_2-3).....(u_n-3) \\ &= e^{V_0} \times e^{V_1} \times ..... \times e^{V_n} \\ &= e^{V_0+V_1+.....+V_n} = e^{S_n} \end{aligned}$$