

CHƯƠNG III: NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 2: TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân từ a**

đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx$.

Vậy:
$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên; $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân; $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân.

Chú ý:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
- Tích phân chỉ phụ thuộc vào hàm f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

2. Các tính chất của tích phân:

Tính chất 1:
$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Tính chất 2:
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Tính chất 3:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (a < c < b)$$

II. DẠNG TOÁN

Tích phân của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$I = \int_a^b g(x)dx$$

Bài toán : Tính tích phân

(với $g(x)$ là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)

PP chung:

Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên $[a; b]$

Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

Tính mỗi tích phân thành phần.

$$I = \int_a^b |f(x)| dx$$

Đặc biệt : Tính tích phân

Cách giải

Cách 1:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a; b]$

+) Xét dấu của $f(x)$ trên $[a; b]$, dựa vào dấu của $f(x)$ để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

+) Tính mỗi tích phân thành phần.

Cách 2:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a; b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_n$

(với $x_1 < x_2 < \dots < x_n$).

$$I = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

Khi đó

$$\Rightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

+) Tính mỗi tích phân thành phần

$$I = \int_0^2 |x - 1| dx$$

Ví dụ 1: Tính tích phân

ta được kết quả :

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Cách 1:

Cho $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Ta có bảng xét dấu :

x	0	1
	2	
x - 1	-	0
		+

$$I = - \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = - \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$$

Khi đó :

$$= 1 \quad \text{p} \quad \text{chọn A}$$

Cách 2:

Cho $x-1=0 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

$$I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = \left| \int_0^1 (x-1) dx \right| + \left| \int_1^2 (x-1) dx \right|$$

Khi đó

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| + \left| \frac{4}{2} - 2 \right| = 1 \quad \text{p} \quad \text{chọn A}$$

$$I = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$$

Ví dụ 2: Tính tích phân

ta được kết quả :

A. 4

B. 3

C. 9

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Cách 1:

Cho $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn)

Bảng xét dấu của $x^2 - 1$ trên đoạn $[-2, 2]$

x	-2	-1	1	2
$x^2 - 1$	+	0	-	0
				+

$$I = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = 4 \quad \text{p} \quad \text{chọn B}$$

Cách 2:

Cho $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn)

$$I = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1| dx + \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx$$

Khi đó:

Chọn B

Ví dụ 3: Tính tích phân

ta được kết quả :

A.4

B. 3

C. 2

D. ¹

Lời giải

Cách 1:

Cho $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\hat{U} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Bảng xét dấu của $x^2 - 3x + 2$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}, 2\right]$

Khi đó :

Chon D

Cách 2:

Cho $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\hat{U}$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \\
 &= \left| \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| \\
 &= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x^2 \right|_0^1 + \left| \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x^2 \right|_1^2 = \left| \frac{5}{6} \right| + \left| -\frac{1}{6} \right| = 1
 \end{aligned}$$

Đáp án: **Chọn D**

$$I = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} |\sin 2x| dx$$

Ví dụ 4: Tính tích phân ta được kết quả :

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Lời giải

$$\text{Nếu: } \frac{p}{4} \leq x \leq \frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} \leq 2x \leq p \Rightarrow \sin 2x \geq 0$$

$$\text{Nếu: } \frac{p}{2} \leq x \leq \frac{3p}{4} \Rightarrow p \leq 2x \leq \frac{3p}{2} \Rightarrow \sin 2x \leq 0$$

$$I = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} |\sin 2x| dx = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{3p}{4}} \sin 2x dx$$

Khi đó:

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{p}{2}}^{\frac{3p}{4}} = -\frac{1}{2}(-1 - 0) + \frac{1}{2}(0 + 1) = 1$$

Đáp án: **Chọn C**

$$I = \int_{-1}^a (x^2 - x) dx$$

Ví dụ 5: Tính tích phân

ta được kết quả

$$I = \frac{11}{6}, \text{ khi đó ta có:}$$

A. $a = 1$ B. $a = 2$ C. $a = 3$ D. $a = 4$

Lời giải

Nhận xét: từ các đáp án Đ. $a \geq 1$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Cho

(thỏa mãn)

Ta có bảng xét dấu của $x^2 - x$ trên đoạn $[1; a]$

x	-1	0	1
$x^2 - x$	$+$	0	$-$
	$+$		

$$I = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^a (x^2 - x) dx$$

Khi đó

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^a = 0 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

$$I = \frac{55}{30} \hat{=} \frac{7}{6} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} = \frac{11}{6} \hat{=} 2a^3 - 3a^2 - 4 = 0$$

Do

$$\hat{=} (a - 2)(2a^2 + a + 2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$\Rightarrow$ chọn B

$$I = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - x - 1| dx$$

Ví dụ 6: Tính tích phân
 $a + b$ là:

ta được kết quả $I = \frac{a}{b}$, khi đó tổng

A. 7

B. 3

C. 5

D. 9

Lời giải

$$\text{Do } x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2 \notin \mathbb{Q}, x \in [1; 1]$$

$$I = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - x - 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^1 = \frac{11}{12} - \left(\frac{5}{12} - \frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

Khi đó

$$\Rightarrow a = 4, b = 3 \Rightarrow a + b = 7 \Rightarrow \text{chọn A}$$

$$I = \int_{-2}^0 \left| \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \right| dx$$

Ví dụ 7: Tính tích phân

ta được kết quả $I = a + b \ln 2 + c \ln 3$

(với a, b, c là các số nguyên). Khi đó giá trị của biểu thức $T = 2a^3 + 3b - 4c$ là:

A. $T = -20$

B. $T = 3$

C. $T = 22$

D. $T = 6$

Lời giải

Cho $\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = 0 \hat{=} \frac{(x+1)(x-2)}{x-1} = 0 \hat{=} \begin{matrix} x = -1 \\ x = 2 \end{matrix}$, do $x \in [2; 0]$ nên $x = -1$

x	-2	0	
$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$	-	0	+

Khi đó

$$I = - \int_{-2}^{-1} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} dx + \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} dx = - \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x - 1} dx + \int_{-1}^0 \frac{2}{x - 1} dx$$

$$= - \left. \frac{2}{2} - 2 \ln|x - 1| \right|_{-2}^{-1} + \left. \frac{2}{2} - 2 \ln|x - 1| \right|_{-1}^0 = 1 + 4 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$a = 1, b = 4, c = -2$

$T = 2a^3 + 3b - 4c = 22$ **chọn C**

$$I = \int_0^1 x|x - a| dx, a > 0$$

Ví dụ 8: Tính tích phân ta được kết quả $I = f(a)$. Khi đó tổng

$f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ có giá trị bằng:

A. $\frac{24}{91}$

B. $\frac{91}{24}$

C. $\frac{17}{2}$

D. $\frac{2}{17}$

Lời giải

TH1: Nếu $a \geq 1$ khi đó

$$I = - \int_0^1 x(x - a) dx = \left. \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow f(8) = \frac{8}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$I = - \int_0^a x(x - a) dx + \int_a^1 x(x - a) dx$$

TH 2: Nếu $0 < a < 1$ khi đó

$$= \left. \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^a + \left. \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

Khi đó $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{3} + \frac{1}{8} = \frac{91}{24}$ **chọn B**

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$$

Ví dụ 9: Tính tích phân

ta được kết quả $I = \frac{a}{\ln b}$ (với a, b là các

$$J = \int_a^b |2x - 3| dx$$

số nguyên dương). Khi đó

có giá trị bằng:

A. $J = \frac{1}{2}$.

B. $J = 2$.

C. $J = \frac{1}{3}$.

D. $J = 3$.

Lời giải

Cho $2^x - 2^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2^{2x} - 1}{2^x} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Khi đó $I = - \int_{-1}^0 (2^x - 2^{-x}) dx + \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) dx = - \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_0^1$

$= \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow a = 1, b = 2$. Khi đó $J = \int_a^b |2x - 3| dx = \int_1^2 |2x - 3| dx = \frac{1}{2}$ **chọn A**

BÀI TẬP

NHẬN BIẾT

Câu 1: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

B. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$

C. $\int_{-2}^3 |e^x(x+1)| dx = \left| \int_{-2}^3 e^x(x+1) dx \right|$

D. $\int_{-1}^{2018} |x^4 + x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 + x^2 + 1) dx$

Lời giải

Vì $x^4 + x^2 + 1 \geq 0, \forall x \in [-1; 2018] \Rightarrow \int_{-1}^{2018} |x^4 + x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 + x^2 + 1) dx$ **chọn D**

$$I = \int_0^1 |x - 2| dx$$

Câu 2: Tính tích phân

ta được kết quả

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

Lời giải

Do $x - 2 < 0, \forall x \in [0; 1]$ $I = - \int_0^1 (x - 2) dx = - \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$ **chọn C**

THÔNG HIỂU

$$I = \int_{-1}^4 (x^2 - 3x + 2) dx$$

Câu 3: Tính tích phân ta được kết quả

- A. $-\frac{19}{2}$ B. $\frac{19}{2}$ C. $\frac{28}{6}$ D. 19

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^4 (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^4 = \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Đ **chọn B**
VẬN DỤNG

$$I = \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx$$

Câu 4: Tính tích phân ta được kết quả:

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Lời giải

Cách 1:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx = \int_{-1}^0 x dx - \int_{-1}^0 (1 - x) dx + \int_0^1 x dx - \int_0^1 (x - 1) dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Đ **chọn C**

Cách 2:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 (-x + x - 1) dx + \int_0^1 (x + x - 1) dx + \int_1^2 (x - x + 1) dx \\ &= -x \Big|_{-1}^0 + \left(x^2 - x \right) \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Đ **chọn C**

$$I = \int_0^2 (3^x + x - 4) dx$$

Câu 5: Tính tích phân ta được kết quả $I = a + \frac{b}{\ln c}$ (với a, b, c là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của biểu thức $T = a^3 + 3b^2 + 2c$ bằng:

A. 55

B. 36

C. 38

D. 73

Lời giải

Đặt $h(x) = 3^x - (4 - x) = 3^x + x - 4$.

Bảng xét dấu

x		0		1
		2		
$h(x)$		-	0	+

$$I = - \int_0^1 (3^x + x - 4) dx + \int_1^2 (3^x + x - 4) dx$$

$$= - \left[\frac{3^x}{\ln 3} - 4x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{3^x}{\ln 3} - 4x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 1 + \frac{4}{\ln 3} \Rightarrow a=1, b=4, c=3$$

$$\Rightarrow T = a^3 + 3b^2 + 2c = 55 \quad \text{Đáp án: chọn A}$$