

EXERCICE 1 (8 POINTS)

1. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (B): $y' = y$.

(b) Déterminer la solution particulière g de l'équation (E) qui vérifie : $g(0) = 1$.

(c) Soit f la fonction définie sur $10; +\infty$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.
 $g'(x)$ où g est la fonction réciproque de

Expliciter $f(x)$ pour $x \in 10; +\infty$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $10; +\infty$ par : $f(x) = \ln(x)$.

9.

2. Calculer en fonction de $x \in 10; +\infty$, la fonction dérivée de f : $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation

de f .

3. Pour tout entier naturel non nul n , on pose: $g(x) = f(x) - x^n$.

(a) Montrer que g est une fonction décroissante sur $10; 1$.

(b) Dédire que pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique réel $a_n \in]0; 1[$ tel $f(a_n) = (a_n)^n$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $g(a_{n+1}) < 0$.

(d) Dédire le sens de monotonie de la suite (a_n) puis montrer qu'elle est convergente..

4. On pose $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

(a) Vérifier que $0 < a_n < L \leq 1$.

(b) Soit h la fonction définie sur $]0;1[$ par : $h(x) = -1 + \ln(x)$

Vérifier que $h(a_n) = \frac{1}{n}$.

(c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} h'(x)$, puis montrer que $L=1$.

$$+0+x$$

(d) Dédurre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = 0$.

5. Pour tout entier naturel non nul n , on pose;
 $U_n = \sum_{k=1}^n f(k)$.

(a) Montrer que : $f'(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$ où $k \in \{1; \dots; n-1\}$.

que
 l'on ait :

- $\int_0^1 f(t) dt \leq U_n \leq \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{n}$

(b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $\int_0^1 f(t) dt \leq U_n \leq \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{n}$

(c) Déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$.

CS Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 (5 POINTS)

Une entreprise fabrique des puces électriques qui sont utilisées pour matériels aussi divers que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.

A la sortie de fabrication, 5% d'entre-elles présentent un défaut

et sont donc éliminées. Les puces

restantes sont livrées
aux clients.

observe que 2% des puces livrées ont une
durée de vie courte. On suppose que 30 %
des puces **ont** une On dit qu'une puce a une
durée de vie courte si sa durée de vie est inférieure
ou égale à 1000 heures. On

durée de vie courte.

On note L l'évènement: <<la
puce est livrée. >>

On note C l'évènement ;<< la puce a une durée de
vie courte c-à-d inférieure ou égale à 1000 heures.>> 1.

On tire au hasard une puce fabriquée par
l'entreprise.

(a) Donner la valeur de
 $P(C|L)$.

(b) Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et
ait une durée de vie strictement supérieure à 1000

heures ??

(c) Quelle est la probabilité que la puce soit

éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la

chaîne de fabrication
??.

(d) Déterminer $P(\text{LIC})$.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

(a) Montrer que $\lambda =$

$$-\frac{\ln(0.98)}{1000}$$

$$2.02 \times 10^{-5}.$$

(b) Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 1000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

(c) Calculer $P(20000 \leq X \leq 30000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est 0.003.

Soit n un entier naturel non nul, on prélève au hasard n puces prêtes à être livrées. On admettra que ce prélèvement de n puces revient à effectuer un tirage avec remise de n puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une durée de vie courte dans cet échantillon.

(a) Dans cette question, on prend $n=1500$: calculer la probabilité d'avoir 40 pièces ayant une durée de vie courte.

(b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que la probabilité qu'au moins une puce ait une durée de vie Courte soit supérieure ou égale à 0.99.

CS Scanne avec CamScanner

EXERCICE°3 (4 POINTS)

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni d'un R.o.N.d. (A, AB, AD, AE).

On désigne par I le milieu du segment [AD] et k le

point de coordonnées (;;).

1. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BIG).

(b) Calculer le volume V du tétraèdre BIGE.

E

A

H

2. Soit l'ensemble des points M de l'espace

tels que: $KB \text{ AKM} = KE$

(a) Montrer que 4 est une droite et en donner une représentation paramétrique.



(b) Si M est un point de coordonnées $(3 - 2a; -1 + 2a; a)$, avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer alors que :

$$(BD \text{ ABG}). BM = 1 - a.$$

(c) Pour $a \in [0; 1]$, déterminer les positions de M pour lesquelles le volume du tétraèdre BGDM soit le $\frac{1}{2}$

de celui du cube ABCDEFGH.

3. Soit N $(\cos(2x); 1; 0)$ où $x \in [0; \pi]$

Pour tout $x \in [0; \pi]$, on considère le réel positif : $f(x) = d(N, (EH))$ (distance du point N à la droite (EH))

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2})}.$$

(a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur

$[0, \pi]$

(c) Déduire la valeur de x pour laquelle la distance $d(N, (EH))$ est maximale.

EXERCICE°4 (3 POINTS)

Le produit d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales.

Une *étude* faite **sur** un produit a donné les résultats suivants :

Le prix au kilogramme est exprimé en dinars et les quantités pour l'offre et la demande sont exprimées en milliers de kilogrammes.

Prix proposé

3

3.50

4.5

6.5

8

10

x_i

Demande y_i

6.25

4.90

3.75

2.75

2.40

2.25

Offre z_i

1.25

1.30

1.30

1.50

1.55

1.60

1. *Etude de l'offre* (a) Calculer le coefficient de corrélation de Z en X et interpréter le résultat

(b) Donner une équation de la droite de régression de Z en X .

2. *Etude de la demande.*

(a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de Y en X et interpréter le résultat.

(b) Donner une équation de la droite de régression de Y en X .

(c) On pose $T_i = \ln(Y)$. Calculer le coefficient de corrélation de T en X .

(d) Déterminer une équation de la droite de régression de T en X et en déduire l'expression de Y en fonction de X .

Correction (L.P. Menzah 8)

Exercice (Analyse de fonctions 1 équations différentielles, Ln. calcul Intégral, suites)

1. (a) $y(x) = Ae^x$.

$$(e) \forall x > 0, f'(x) = \sqrt{x} (4) - (b)(0) 11(x)''.$$

2. $\forall x > 0, f'(x)$ Le signe de $f'(x)$ sur $10; +\infty$ est celui de $\ln(x)-2$, On a dressé ci-contre le tableau de variation de f :

10+

3. (a) $\forall x \in 10; 11, f(x) = \ln(x) - n \cdot x'' - 10$, d'où la fonction

0

g est strictement décroissante sur $10; 11$.

$J'(x)$

$+\infty$

(b) g est continue et strictement décroissante sur $10; 11$ d'où g réa- (x) Lise une bijection de $10; 11$ sur: $g_n(10; 11) = 1$; $+\infty$, d'où l'é-

$-2e-1$

$+\infty$

+

quation $g(x) = 0$ es $f(x) = x''$ admet une unique solution $a_n \in 10; 11$.

(c) $g_n(a_{n+1}) = f(a_{n+1}) - \ln(a_{n+1}) < 0$ car $a_{n+1} \in 10; 11$.

(d) g est strictement décroissante sur $10; 11$ et $g_n(a_{n+1}) < 0 = g_n(a_n)$ d'où $a_{n+1} > a_n$: par suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite strictement croissante, comme, de plus, elle est majorée par 1, alors elle converge.

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n < 1$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, $0 < a_1 \leq 1$.

(b) $\ln(a) = -\sqrt{a_n}$

$$h(a_n) = \frac{1}{\ln(a_n)} = \frac{1}{\ln(a_n)} \sim \ln(a_n)$$

$$1. (n+1) \ln(a_2)$$

+

-

11



-La

$n+$

$- - +$

$+n+= n.$

$=$

$$\lim_{x \rightarrow} \quad \text{+co si } L=1$$

$$\lim h(x) = \{h(L) \text{ st } L \in]0; 1[$$

(d)

$$\text{Or } \lim_{1+00} a, L = \lim_{5+00} h(a) = \lim h(x)$$

$$\lim a_n = 1 \text{ alors } \lim (a^n) = \lim f(a) = f(1) = 0.$$

est continue en 1

5. (a) Soit $k \in (1; \dots - 1)$, on a : $10; 1]$ or fest décroissante sur $10; 1]$ donc pour tout réel $t \in$

$HV/s/05/)$. En intégrant les trois membres de l'inégalité de k/n jusqu'à $(k+1)/n$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)$$



(b) En effectuant la somme terme à terme de l'encadrement (*) de $k-1$ jusqu'à $k-n-1$, on obtient:

$$k+$$

Par la relation de Chasles pour les intégrales on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} f'' \\ f' \\ f \end{array} \right\} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$f(t)dt =$$

ولاد

(dt s

$$f(t)dt.$$

$$\leq = \sqrt{()} + !$$

$$f(t)dt.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = 0.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on montre que: $\int_0^1 f(t)dt =$
 $-2 \ln(n) + \gamma \pi$
 +4-Par suite

$$f(t)dt = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

$$\int_0^1 f(t)dt = 0 + 0 = 0.$$

$$pae) =$$

$$1mm \ (\sim 1 \ (4) + \sqrt{\ (6) \ de}) = 0 + 0 = 0.$$

$$(\bar{\sigma} + \sigma) +$$

Exercice 2 (Probabilités et variables aléatoires)

- (a) $p(CL)=0.02$
- (b) $p(LC) = p(CIL) \times p(L) = 0.98 \times 0.95 = 0.931$
- (c) $p(LUC) = p(Lnc)=1-p(Lnc) = 1-0.931 = 0.069.$

$$\lim_{1 \rightarrow +\infty} U_{11} = 0.$$

$$(d)p(LIC)=$$

$$P(LOC) = 0.02$$

$$P(C) =$$

$$0.066.$$

2. (a) $P(X \leq 1000) = p(CIL) = 0.021 - e^{-1000 \times 0.002} = 0.98 \lambda =$

(b) $p(x \geq 1000) = 1 - 0.021 = 0.979 = 0.98.$

(c) $p(20000 \leq X \leq 30000) = e^{-20000 \times 0.002} - e^{-30000 \times 0.002} =$

$$= \frac{-\ln(0.98)}{1000} \times 2.02 \times 10^{-5}$$

$-0.404e-0.606 = 0.122$; presque 12 % des puces livrées ont une durée de vie comprise entre 20000 heures et 30000 heures.

3. (a) Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1500$ et $p = 3.10^{-3}$.

5. (a) Soit $k \in \{1 : \dots ; n - 1\}$, on a : $10; 1)$ or f est décroissante sur $10; 1]$ donc pour tout réel $t \in$
 BVs/os/). En intégrant les trois membres de l'inégalité de k/n jusqu'à $(k+1)/n$, on obtient:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq \frac{k+2}{n}$$

roats().

(b) En effectuant la somme terme à terme de l'encadrement (*) de $k-1$ jusqu'à $k-n-1$, on obtient :

Par la relation de Chasles pour les intégrales on obtient:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$f(t)$ de.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Σ

$$f(e) ds \text{ Un } s = f() + ' fedt.$$

$$-r() srede su1 = [f(c)de \leq Un$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = 0.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on montre q

-2.in(n) : $\text{ff}(c) \, dt =$ que: +4 Par suite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0.$$

Exercice (Probabilités et variables aléatoires)

1. (a) $p(\text{CIL}) = 0.02$

$$(b) p(L \cap C) = p(C|L) \times p(L) = 0.98 \times 0.95 = 0.931$$

$$(0) \quad p(T \cup c) = p(LNC) = 1 - p(L \cap \check{c}) = 1 - 0.931 = 0.069.$$

(d) $p(\text{LIC}) = P(\text{LOC})$

$P(C)$

0.02

0.3

2

30

=

0.066

2. (a) $p(X \leq 1000) = p(\text{CIL}) = 0.021 - e^{-1000 - 1000} = 0.98\lambda = \underline{\ln(0.90)}$

(b) $P(X \geq 1000) = -1000 = -0.0202$

$=$

$0.98.$

$= 2.02 \times 10^{-5}$

(c) $p(20000 \leq X \leq 30000) = e^{-20000/2} - e^{-30000/2} = 0.404 - 0.606 = 0.122$; presque 12% des puces livrées ont une durée de vie comprise entre 20000 heures et 30000 heures.

3. (a) Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1500$ et $p = 3.103$.

$$p(Y = 40) = 100 p \times (1 - p) 1€$$

$$P(r \geq 1) \geq 0,99 \quad (1 - p)^n \geq 10^{-2} \quad n \ln(1 - p) \geq -21n \quad (10) \quad n$$

$$-21n(10) \quad 1532.7$$

$$\ln(0.997)$$

par suite la plus petite valeur de n recherchée est n= 1533.

Exercice03 (Géométrie dans L'espace)

1.-A D, 10:1/2:0); B(1;0;0) et G(1;1;1). On a: Bet BG

F(!)..

1. (a) BI ABG. par conséquent le plan (BIG) est d'équation: +y-z+c=0, or le point B(1 :0:0)

appartient à (BIG) alors c =

$$- \text{ donc : } (BIG): x+2y-2z-1=0.$$

(b) V ==|(BI ABG).BE |= x

2. (a) Montrons que $\triangle$ est une droite (c'est une question qui dépasse le programme de géométrie de la terminale).

Division vectorielle et Formule **du double-produit vectoriel** de Gibbs

Solent **a** et **b** deux vecteurs non *nuls orthogonaux de l'espace*. On cherche à résoudre l'équation vectorielle : **(E): a b** (l'inconnue de l'équation étant le vecteur **x**).

Soit une solution de l'équation (E) alors (ax)=ba, or on a **la formule:**

$$(a \wedge x) \wedge a = a \cdot x \cdot (x \cdot a) \text{ a (formule à prouver en exercice)}$$

Par *suite* le vecteur solution de (E) est à fortiori **de la** forme:

$$a \cdot s \quad a \quad a \quad a$$

Ta |||

$$+ \quad \text{Bn}$$

$$12 \quad ($$

Réciproquement, on *vérifie* que tout vecteur de la forme (*) **est** solution de l'équation (E).

Dans notre cas, KM = (KM.

$$(KM. KB) K + KE A$$

$$M(x:y:z) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$$

(

3

IMNIM

HIM

KB

On vérifie que KB=1.

$$= || (x - 1) - (x - 3) - (\sim \sim 3) |.$$

$$0 \cdot 0 \cdot 0$$

NIMNI

M HIM

HIMNIM

Attention, les calculs sont pénibles, on obtient enfin le système :

$$\{4x+5y-28=0\}$$

$$^2 \quad (\text{où } \in \mathbb{R})$$

4 est donc la droite passant par le point 2 (2:0:) et de vecteur directeur (

))

(b) BD 1

BD et BM

$$1 + 28) 0$$

On a: BD ABG

$$(BD \text{ ABG}). BM2 - Za$$

(1)

(c) $a \in \mathbb{R} \setminus [1]$

$$1+2a-a1-a.$$

Volume GDM

1

$$x(BD \text{ ABG}). BM$$

$$11-a)=2a$$

$$-a1$$

$$\text{Volumescom} == |1-a| = 2a = 3 \text{ ou bien } a = -1.$$

$$M(-3;5;3) \text{ ou bien } M(5;-3;-1).$$

3. (a) *Rappel* (Distance d'un point à une **droite**) Soient 4= (A, u) et M un point de l'espace qui n'appartient pas à la droite 4. Alors la distance du point M à la droite 4 est donnée par;

$$AM \cdot A$$

$$d(M,4)=$$

$$f(x)=$$

$$\in \mathbb{N} \quad A \in \mathbb{H} \quad E \in \mathbb{H}$$

$$-AB - \cos(2x-4).AE|| \\ 1 + \cos 2(2x-5)$$

(b) $f'(x) = \cos(x)$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos(4x)$. Ci-dessous, on a dressé le tableau de variation de la fonction L

700

(c) On conclut que la distance $d(N,(EH))$ est maximale si et seulement si $z=$;

$$\begin{array}{l} H \\ 0 \\ '() \\ + \\ (=) \\ V \end{array}$$