

05.09.2022

**Тема: Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку.
Перестановки, розміщення, комбінації**

Посилання на підручник:
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

1. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми й добутку.

(Згадати поняття множини, елементів множини)

Скінченна упорядкована множина – така множина, для якої визначений порядок розміщення її елементів.

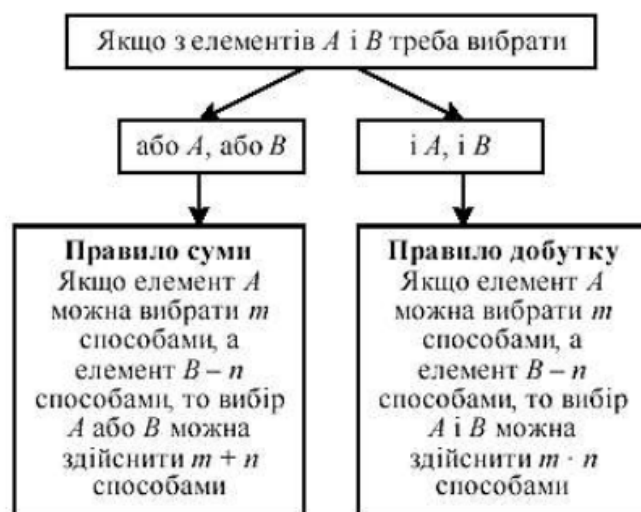
Комбінаторика – розділ математики присвячений розв’язанню задач про вибір і розміщення елементів скінченної множини, відповідно до заданих правил.

Ці правила визначають спосіб побудови деякої конструкції – комбінаторної сполуки.

В основі класичної комбінаторики лежать комбінаторні правила суми та добутку.

Наприклад (правило суми) – на тарілці лежать 5 яблук і 9 груш. Один плід можна обрати $5+9=14$ (способами).

**Вибір правила комбінаторного додавання
і комбінаторного множення**



Наприклад (правило добутку) – із 6 видів конвертів без марок і 5 марок один конверт і одну марку можна вибрати $6 \cdot 5 = 30$ (способами).

Вправа 1. У групі 15 хлопців і 12 дівчат. Скількома способами можна вибрати:

- 1) хлопця;
- 2) дівчину;
- 3) одного студента цієї групи;
- 4) двох студентів – хлопця й дівчину.

Розв'язання

- 1) Хлопця можна вибрати 15 способами;
- 2) дівчину можна вибрати 12 способами;
- 3) за правилом суми або дівчину або хлопця можна вибрати $15+12=27$ способами;
- 4) за правилом добутку вибрати двох студентів – хлопця й дівчину – можна $15 \cdot 12 = 180$ способами.

Відповідь: 1) 15; 2) 12; 3) 27; 4) 180 способами.

Вправа 2. Скількома способами можна пошити триколірний прапор, якщо є тканини 5 різних кольорів?

Розв'язання

Перший колір можна вибрати п'ятьма способами, другий – чотирма, третій – трьома. За правилом добутку триколірний прапор можна зшити $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способами.

Відповідь: 60.

2. Перестановки, розміщення, комбінації.

Означення. **Факторіалом** називають добуток n послідовних натуральних чисел

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) = n!(n - \text{факторіал}). 0! = 1, 1! = 1.$$

Наприклад, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Означення. **Перестановкою з n елементів** називають будь-яку впорядковану множину з n елементів.

$$P_n = n! - \text{формула числа перестановок без повторень}$$

В даній формулі кожен елемент, що входить у комбінацію поданий у єдиному екземплярі. Повернемося до задачі, яку ми розглядали на початку заняття.

✓ Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються?

Отже, кількість таких чисел дорівнює $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Означення. **Розміщенням з n елементів по k** називають будь-яку впорядковану множину з k елементів n - елементної множини.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} - \text{формула числа розміщень без повторень}$$

Розглянемо задачу. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що цифри не повторюються.

Отже, маємо розміщення з 5 по 3 елементи: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Означення. **Комбінацією без повторень з n елементів по k** називають будь-яку k - елементну підмножину n – елементної множини.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} - \text{формула числа комбінацій без повторень}$$

Розглянемо задачу. Скількома способами можна вибрати дві різні цифри із цифр 1, 2, 3, 4, 5?

У цій задачі не має значення порядок розміщення двох цифр, які вибираємо із даних п'яти цифр, тобто способів вибору цифр буде $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Під час розв'язування комбінаторних задач зручно користуватися схемою:

Вибір формули для обчислення кількості сполук



Вправа 1. Скількома способами можна скласти список із 6 учнів?

Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $P_6 = 6! = 720$. (способами).

Відповідь: 720 способами.

Вправа 2. Скількома способами можна розмістити 8 осіб за столом, біля якого стоїть 8 стільців?

Розв'язання

Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $P_8 = 8! = 40320$ (способами).

Відповідь: 40320 способами.

Вправа 3. Скільки існує трицифрових чисел, у яких всі цифри непарні й різні.

Розв'язання

Усього непарних цифр 5. Оскільки порядок враховується й до сполуки входять не всі цифри, а тільки три, то таких чисел буде. $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$.

Відповідь: 60.

Вправа 4. Скільки існує трицифрових чисел, у яких всі цифри парні й різні.

Розв'язання

Усього парних цифр 5. Тоді можна скласти трицифрових чисел усього A_5^3 , але серед них будуть і ті, що мають нуль на першому місці. Таких «неправильних чисел» буде A_4^2 . Отже, чисел, що нас цікавлять, буде $A_5^3 - A_4^2 = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = \frac{5!-4!}{2!} = \frac{120-24}{2} = \frac{96}{2} = 48$.

Відповідь: 48.

Вправа 5. Із 3 яблук і 7 бананів треба приготувати десерт із 5 фруктів, у який входило б хоча б одне яблуко. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання

1) Скількома способами можна приготувати десерт із 1 яблука і 4 бананів? Яке правило слід застосувати? (Правило добутку)

$$C_3^1 C_7^4 = 3 \frac{7!}{4! (7-4)!} = 105 \text{ сп.}$$

2) Скількома способами можна приготувати десерт із 2 яблук і 3 бананів?

$$C_3^2 C_7^3 = \frac{3!}{2! (3-2)!} \frac{7!}{3! (7-3)!} = 105 \text{ сп.}$$

3) Скількома способами можна приготувати десерт із 3 яблук і 2 бананів?

$$C_3^3 C_7^2 = 1 \frac{7!}{2! (7-2)!} = 21 \text{ сп.}$$

4) Скількома способами можна приготувати даний десерт? Яке правило при цьому слід застосувати?

$$105+105+21=231 \text{ (сп.)}$$

Відповідь: 231 спосіб.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал §3, п.12-13.
2. Законспектувати основні означення, формули.
3. Виконати вправи: 12.1, 12.4, 12.7, 12.9, 13.1, 13.4, 13.6, 13.8.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://www.youtube.com/watch?v=NORqFoG5pW0>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.