

I.a)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

I.b)

Notons $\omega = \frac{qB}{m} = \varepsilon\omega_c$; nous utiliserons la notation ω dans la suite à la place de la notation $\varepsilon\omega_c$ de l'énoncé.

$$(1) \quad \dot{x} = \omega y$$

$$(2) \quad \dot{y} = -\omega x$$

$$(3) \quad \dot{z} = 0$$

I.c)

D'après l'équation (3), $v_z = v_{//0}$ est constant au cours du temps.

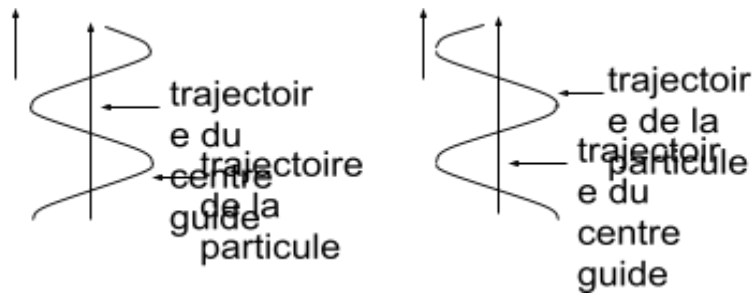
Posons $u = v_x + iv_y$; en formant la combinaison (1) + i(2), $\dot{u} = -i\omega u$, d'où, compte tenu de $u(0) = v_{\perp 0}$,
 $u = v_{\perp 0} \exp(-i\omega t)$

I.d)

$$r = x + i\omega = \int u dt = \frac{iv_{\perp 0}}{\omega} \exp(-i\omega t) + cste$$

Soit

La particule a un mouvement hélicoïdal uniforme qui résulte de la composition de deux mouvements : un mouvement



$$\rho_L = \frac{|v_{\perp 0}|}{\omega_c}$$

circulaire de rayon avec la vitesse angulaire $-\omega$ dans un plan perpendiculaire au champ magnétique, le centre G de ce cercle décrivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $v_{//}$ parallèle au champ magnétique.

I.e)

Pour un électron :

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 5}{9,1 \times 10^{-31}} = 8,79 \times 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-15}}{9,1 \times 10^{-31}}} = 5,93 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\rho_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = 6,75 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Pour un proton :

$$\omega_c = \frac{eB}{m_H} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 5}{1,67 \times 10^{-27}} = 4,79 \times 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2E}{m_H}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-15}}{1,67 \times 10^{-27}}} = 1,38 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\rho_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = 2,89 \times 10^{-3} \text{ m}$$

II.a)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}$$

$$(4) \quad \dot{v}_x = \omega v_y + \frac{qE_x}{m}$$

$$(5) \quad \dot{v}_y = -\omega v_x$$

$$(6) \quad \dot{v}_z = \frac{qE_z}{m}$$

D'après l'équation (6), $v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{//0}$; $z = \frac{qE_z}{2m}t^2 + v_{//0}t + cste$

Posons $u = v_x + iv_y$; en formant la combinaison $(4) + i(5)$, on obtient $\dot{u} + i\omega u = \frac{qE_x}{m}$, d'où, compte tenu de

$$u(0) = v_{\perp 0}, \quad u = \left(v_{\perp 0} + \frac{iE_x}{B} \right) \exp(-i\omega t) - \frac{iE_x}{B}$$

$$r = x + iy = \int u dt = \left(\frac{iv_{\perp 0}}{\omega} - \frac{mE_x}{qB^2} \right) \exp(-i\omega t) - \frac{iE_x}{B}t + cste$$

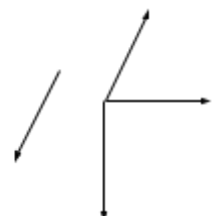
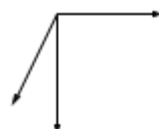
Soit

II.b)

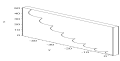
$$\rho_L = \left| \frac{iv_{\perp 0}}{\omega} - \frac{mE_x}{qB^2} \right| = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{v_{\perp 0}^2 + \frac{E_x^2}{B^2}}$$

La particule décrit un cercle de rayon ρ_L avec la vitesse angulaire $-\omega$ (comme l'indique la dérivée $-i\omega$ de l'argument de l'exponentielle complexe), le centre G de ce cercle décrivant un

mouvement uniformément varié de vitesse $-\frac{E_x}{B}u_y + \left(v_{//0} + \frac{qE_z}{m}t \right)u_z$



II.c)



$$v_{\perp G} = -\frac{E_x}{B} u_y = \frac{E \wedge B}{B^2}$$

III.a)

$$v_{\perp G} = \frac{F \wedge B}{qB^2}$$

III.b)

$$v_{\perp G} = \frac{mg \wedge B}{qB^2}$$

III.c)

$$j = \sum nqv = \sum n \frac{mg \wedge B}{B^2} = n(m+M) \frac{g \wedge B}{B^2}$$

Il y a création d'un courant de densité négligeable, parce que n est petit.

IV.a)

$$B(M) = B(G) + (y - y_G) \frac{dB}{dy} (G) u_z$$

$$F = qv \wedge B = qv \wedge B(G) u_z + qv \wedge (y - y_G) \frac{dB}{dy} (G) u_z = qv \wedge B(G) u_z + q \frac{dB}{dy} (G) (y - y_G) (v_x u_z - v_y u_x)$$

IV.b)

L'équation différentielle du mouvement étant non linéaire, on la résout approximativement. En première approximation, $F = qv \wedge B$, d'où $x = x_G + \rho_L \cos \omega t$, $y = y_G - \rho_L \sin \omega t$, G ayant un mouvement rectiligne uniforme parallèle à B .

Dans une meilleure approximation, on considère une force supplémentaire. Compte tenu de $\langle v \rangle = 0$, le terme

$$\langle F \rangle = q \frac{dB}{dy} (G) (y - y_G) (v_x u_z - v_y u_x)$$

principal est

$$x \approx -\rho_L \sin \omega t \quad y \approx -\rho_L \cos \omega t$$

$$\langle (y - y_G) \rangle = \rho_L^2 \omega \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$$

$$\langle (y - y_G)^2 \rangle = \rho_L^2 \omega \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \rho_L^2 \omega$$

$$\langle F \rangle = -\frac{1}{2} \rho_L^2 \omega q \frac{dB}{dy} (G) u_y = -\frac{mv_L^2}{2B} \nabla B$$

Cette expression montre que la force est dirigée dans la direction où le module du champ magnétique décroît le plus vite, quelle que soit la charge ou la vitesse.

IV.c)

Appliquons l'expression de la vitesse de dérive de III.a en y remplaçant la force par sa valeur moyenne :

$$v_{\perp G} = -\frac{mv_L^2 (\nabla B \wedge B)}{2qB^3}$$

$$\rho_L = \left| \frac{mv_L}{qB} \right|$$

Cette expression, équivalente à celle proposée par l'énoncé, puisque ρ_L lui est préférable, car elle a un signe bien défini.

V.

Tous les champs magnétiques de révolution n'ont pas nécessairement la forme proposée. Par exemple, le champ magnétique d'une nappe d'un courant régulièrement réparti sur un tore d'axe Oz est de révolution autour de cet axe, mais est de la forme $B_\theta(r, z) u_\theta$. Il faut faire l'hypothèse supplémentaire que tout plan contenant Oz est un plan de symétrie du champ magnétique ; alors $B = B_r(r, z) u_r + B_z(r, z) u_z$.

Notons aussi que, contrairement à la formulation de l'énoncé, $\vec{B}$ n'est pas une fonction de r et z seuls : il dépend aussi de θ par l'intermédiaire de $\vec{u}_r$.

V.a)

Une spire d'axe Oz crée un tel champ magnétique. En effet, tout plan contenant Oz est un plan d'antisymétrie du courant donc un plan de symétrie du champ magnétique, donc $B_\theta = 0$. D'autre part, la distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz , donc les coordonnées du champ magnétique ne dépendent pas de θ :

$$\vec{B} = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$$

V.b)

Supposons que le champ magnétique ne présente pas de singularité sur l'axe. Exprimons approximativement $\vec{B}$ au voisinage de l'axe par un développement en puissances successives de r tronqué à l'ordre 1. Comme Oz est un axe de révolution du champ magnétique, c'est un axe de symétrie : $B_z(r, z)$ est une fonction paire de r et $B_r(r, z)$ est une fonction impaire de r ; le développement tronqué à l'ordre 1 est de la forme $B_z(r, z) \approx B_z(0, z)$ et

$$B_r(r, z) \approx r \frac{\partial B_r}{\partial r}(0, z)$$

Soit une surface fermée formée d'un cylindre d'axe Oz , de rayon r petit et de longueur dz complété par deux disques terminaux de rayons r et d'abscisses z et $z + dz$. Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée est nul :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_z(z + dz)\pi r^2 - B_z(z)\pi r^2 + 2\pi r dz B_r(r) = \frac{dB_z(0, z)}{dz} \pi r^2 dz + \frac{\partial B_r}{\partial r}(0, z) 2\pi r^2 dz = 0 \quad ; \text{d'où}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r}(0, z) = -\frac{1}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \quad \text{et près de l'axe} \quad B_r \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz}$$

V.c)

$$m \frac{dv_z}{dt} = (q\vec{v} \wedge \vec{B})_z = -qv_\theta B_r = \frac{qv_\theta r}{2} \frac{dB_z}{dz} = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z} \frac{dB_z}{dz} \Rightarrow \frac{dv_{||}}{dt} = -\frac{v_\perp^2}{2B_z} \frac{dB_z}{dz} \quad r = -\frac{mv_\theta}{qB} \quad (\text{puisque}).$$

V.d)

La théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m(v_z^2 + v_\perp^2) \right) = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

$$mv_z \frac{dv_z}{dt} + \frac{m}{2} \frac{dv_\perp^2}{dt} = 0$$

$$-v_z \frac{v_\perp^2}{2B_z} \frac{dB_z}{dz} + \frac{1}{2} \frac{dv_\perp^2}{dt} = 0$$

$$-\frac{v_\perp^2}{B_z} \frac{dB_z}{dt} + \frac{dv_\perp^2}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_\perp^2}{v_\perp^2} - \frac{dB_z}{B_z} = 0$$

$$d \ln(v_\perp^2 / B_z) = 0$$

$$v_\perp^2 / B_z = cste$$

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B_z} = cste$$

μ est le moment du dipôle magnétique équivalent à la particule chargée pour un ou plusieurs tours :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \vec{GM} \wedge q\vec{v}$$

V.e)

$$\mu = \frac{mr^2\omega^2}{2B_z} = \frac{q^2}{2m} r^2 B_z = \text{cste}$$

, donc le flux du champ magnétique $\pi r^2 B_z$ à travers le cercle décrit par la particule autour de G est constant : la trajectoire de la particule est une hélice qui s'enroule sur un tube de champ d'axe Oz .
VI.a)

Comme on a supposé $\rho_L \ll R$, une ligne de champ est presque rectiligne et on peut lui appliquer localement les

résultats de V.e. On pourrait le faire sur une grande distance s'il existait une force égale à $m \frac{v_{\parallel}^2}{R} \vec{u}_n$, où $\vec{u}_n$ est le vecteur unitaire de la normale principale à la ligne de champ. En l'absence d'une telle force, le champ magnétique est la

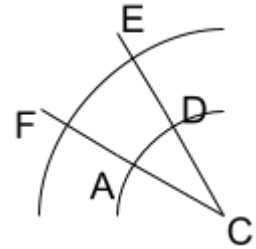
source d'une force $-m \frac{v_{\parallel}^2}{R} \vec{u}_n$ qui d'après II.a crée la vitesse de dérive $\vec{v}_{\perp G} = -\frac{mv_{\parallel}^2 \vec{u}_n \wedge \vec{B}}{RqB^2}$.

VI.b)

Cette proposition est-elle vraie en toute généralité ? Peut-être.

Supposons que les lignes de champ soient des cercles de même axe. La question posée est alors est un problème de géométrie plane. Soit une ligne de champ, M un de ses points,

C , R et $\vec{u}_n$ le centre de courbure, le rayon de courbure et le vecteur unitaire de la normale principale en M . Appliquons le théorème d'Ampère à une courbe fermée $ADEFA$, où AD est un arc de cette ligne de champ vu de C sous l'angle $d\alpha$, DE et FA deux segments appartenant à des droites passant par C et EF un arc d'une ligne de



champ voisine. D'après le théorème d'Ampère, $\oint_{ADEFA} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$, soit

$$B(A)CA.d\alpha - B(F)CF.d\alpha = 0 \Rightarrow (\vec{\text{grad}} B)_n = \frac{B(F) - B(A)}{AF} = \frac{B(A) \left(\frac{CA}{CF} - 1 \right)}{AF} = \frac{B(A)}{CF}, \text{ d'où } (\vec{\text{grad}} B)_n = \frac{B}{R}.$$

VI.c)

Pour effectuer le calcul, il faudrait connaître la composante de $\vec{\text{grad}} B$ sur la binormale à la ligne de champ.

Supposons qu'elle soit nulle (c'est vrai dans le cas traité à la question précédente), $\vec{v}_{\perp G} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2RqB^2} \vec{u}_n \wedge \vec{B}$, d'où

$$\vec{v}_{\perp G} = -\frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{RqB^2} \vec{u}_n \wedge \vec{B}.$$

Remarque : comme $\frac{qB}{m} = \omega$, cette formule est homogène, car de la forme $\vec{v}_{\perp G} = -\frac{(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{R\omega} \vec{u}_n \wedge \frac{\vec{B}}{B}$. Si

$R \gg \rho_L$ (cas usuel), $v_{\perp} \gg v_{\perp G}$.

VII.a)

Il y a conservation de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m(v_z^2 + v_{\perp}^2) = \frac{1}{2} m(v_{z0}^2 + v_{\perp 0}^2)$ et du moment dipolaire $\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0}$. Si le champ magnétique croît, $v_{\perp}^2$ croît, $v_{\parallel}$ décroît et donc peut s'annuler ; si c'est le cas, il change de signe par la suite, car $v_{\parallel}^2$ ne peut devenir négatif : la particule est réfléchie.

VII.b)

$$\sin \theta = v_{\perp} / v \text{ où } v \text{ est constant et } \frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0}, \text{ d'où } \frac{\sin^2 \theta}{B} = \frac{\sin^2 \theta_0}{B_0}.$$

VII.c) et d)

La particule est réfléchie quand $\sin \theta = 1$.

Elle l'est au niveau de S ou S' si $\theta_0 = \theta_{0m} = \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_{0m}}}$.

Si $\theta_0 < \theta_{0m}$, la particule n'est pas réfléchiée : elle est dans le cône de perte.

Si $\theta_0 > \theta_{0m}$, la particule est réfléchiée : les deux bobinages se comportent comme des miroirs magnétiques.

VII.e)

La durée annoncée par l'énoncé paraît bien grande. C'est la durée moyenne entre collisions qui régit la durée de confinement, le temps pour aller d'un miroir à l'autre étant beaucoup plus petit

Si les probabilités de l'orientation de la vitesse après une collision sont également réparties dans toutes les directions,

la probabilité que la direction de la vitesse soit dans l'un des deux cônes de perte est $\frac{2 \times 2\pi(1 - \cos \theta_{0m})}{4\pi} = 1 - \cos \theta_{0m}$;

la durée de confinement est $\frac{t_c}{1 - \cos \theta_{0m}}$.

VIII.a)

Le théorème d'Ampère appliqué à un cercle d'axe Oz et de rayon $\rho = R + r \cos \theta$ donne

$$B_\varphi(r, \theta) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi(R + r \cos \theta)} = \frac{B_0}{1 + (r/R) \cos \theta}$$

VIII.b)

$$\vec{v}_{\perp G} = -\frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{RqB^2} \vec{u}_n \wedge \vec{B} = \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{RqB} \vec{u}_z$$

Les ions sont éjectés dans la direction et le sens de Oz et les électrons dans le sens contraire. Leur vitesse de dérive

$$v_{\perp G} = \frac{mv_{\perp}^2}{eBR} = \frac{2 \times 1,6 \times 10^{-15}}{1,6 \times 10^{-19} \times 5} = 4000 \text{ m.s}^{-1}$$

est la même en moyenne :

$$\frac{2r_m}{v_{\perp G}} = \frac{2 \times 0,2}{4000} = 10^{-4} \text{ s}$$

. La durée de confinement est de l'ordre de

IX.a)

Déterminons le champ magnétique créé par un courant de densité $\vec{j} = j_\varphi(r) \vec{u}_\varphi$.

Tout plan contenant Oz est un plan d'antisymétrie du courant, donc un plan de symétrie du champ magnétique, donc $B_\varphi = 0$. La distribution de courant est invariante dans les rotations d'axe Oz . D'où $\vec{B} = B_r(r, \theta) \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$.

Or l'énoncé suppose $B_r = 0$ ($\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_\theta$ à la question IX.b), ce que la symétrie ne permet pas de conjecturer.

Il faut donc considérer que le champ magnétique est voisin de celui d'un courant cylindrique tangent au courant

$\vec{j}_\varphi(r) \vec{u}_\varphi$ pour la valeur de φ considérée. Cette approximation paraît acceptable si $r_m \ll R$, ce que nous supposons.

Si M est le point pour lequel $r = 0$ dans le plan de coordonnée azimutale φ considérée, et si Mz' est la tangente au cercle d'axe Oz passant par M , la nouvelle distribution de courant a la symétrie cylindrique par rapport à Mz' : tout plan contenant Mz' est plan de symétrie du courant, donc d'antisymétrie du champ magnétique, donc $\vec{B}$ est orthoradial ; cette distribution de courant est invariante par rotation autour de Mz' , donc $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$. Enfin, $B_\theta(r)$ ne dépend pas de φ , car la distribution exacte de courant est invariante par rotation autour de Oz . Appliquons le

théorème d'Ampère à un cercle d'axe Mz' et de rayon r : $2\pi r B_\theta = \mu_0 I(r)$ d'où $B_\theta = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}$.

IX.b)

Un petit déplacement $(dr, r d\theta, (R + r \cos \theta) d\varphi)$ le long d'une ligne de champ est parallèle au champ magnétique $(0, B_\theta, B_\varphi)$; pour ce déplacement :

- $dr = 0$: toute ligne de champ fait partie d'un tore dont la section est un cercle concentrique avec la section du solénoïde toroïdal ;

$$\frac{(R+r \cos \theta) d\varphi}{r d\theta} = \frac{B_\varphi}{B_0} = \frac{\frac{B_0}{1+(r/R) \cos \theta}}{\frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}} \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{2\pi r^2 B_0}{\mu_0 R I(r) (1+(r/R) \cos \theta)^2}$$

•

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = q(r) = \frac{2\pi r^2 B_0}{\mu_0 R I(r)}$$

Cette équation est de la forme $\frac{d\varphi}{d\theta} = q(r)$ si on néglige les termes d'ordre 1 et suivants en r/R , ce qui est conforme à l'approximation qui nous a permis de calculer le champ magnétique.

$q(r)$ est le rapport entre le nombre de tours que fait une ligne de champ dans la direction azimutale et le nombre de tours qu'elle fait dans la direction poloidale.

Remarque : dans les cas simples, les lignes de champ magnétiques sont des courbes fermées. Ici, ce n'est le cas que si $q(r)$ est un entier, ce qui est peu probable, d'autant que les calculs sont approximatifs.

$$\text{Si } q(0)=1, \quad I(r) \approx j_\varphi(0) \pi r^2, \quad \text{d'où } j_\varphi(0) = \frac{2B_0}{\mu_0 R} = \frac{2 \times 5}{4\pi \times 10^{-7}} = 8 \times 10^6 \text{ A.m}^{-2}$$

IX.c)

En première approximation, une particule chargée tourne autour de son centre guide, qui se meut le long d'une ligne de champ ; toutefois, le centre guide dérive lentement perpendiculairement à cette ligne de champ, avec une vitesse telle

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{mv_\perp^2}{R_{\text{courbure}}} - \frac{mv_\perp^2}{2B} \nabla B, \quad \text{où } R_{\text{courbure}} \text{ est}$$

le rayon de courbure d'une ligne de champ. Qualitativement, cette force est dirigée dans la direction opposée à celle de la projection du point considéré sur le cercle moyen du tore ; la dérive crée un mouvement qui s'enroule autour de ce cercle moyen du tore. Les particules ont deux raisons de décrire des hélices autour de ce cercle, cette dérive et le fait qu'elles suivent les lignes de champ.

L'énoncé demande de mettre en évidence « que l'effet de dérive est compensé exactement entre les portions de trajectoire du centre guide, situées de part et d'autre du plan équatorial du tore ». Voici en figure 1 la trajectoire sans champ poloidal et en figure 2 la trajectoire avec champ poloidal ; ces deux figures sont dilatées dans le sens de l'axe z , pour mieux montrer la dérive :

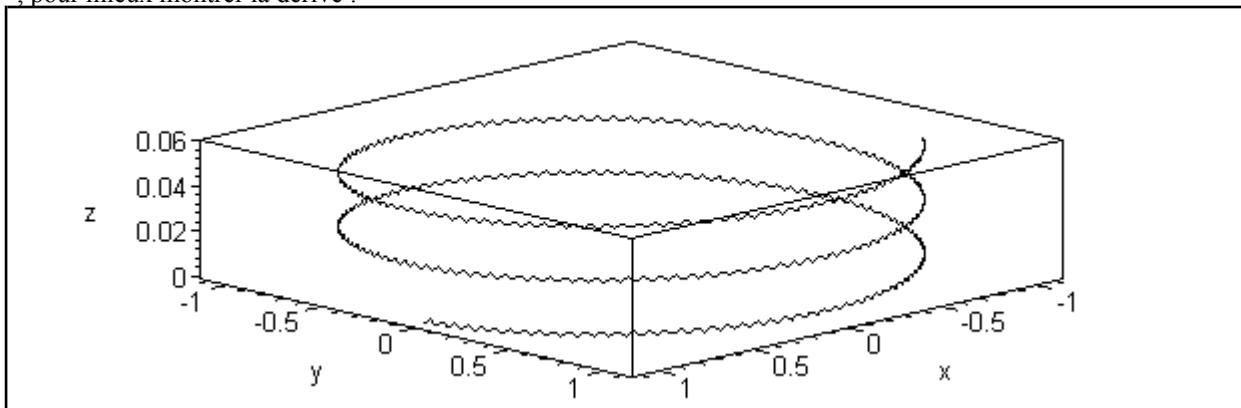


figure 1 :
trajectoire sans champ poloidal

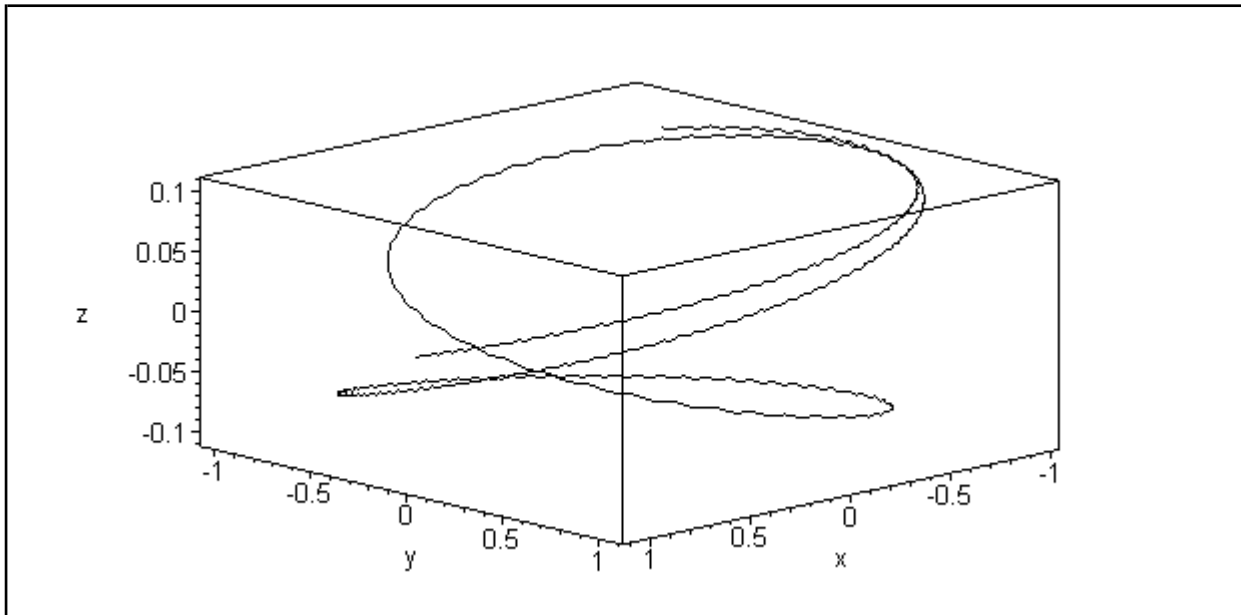


figure 2
trajectoire avec champ poloïdal

En l'absence de champ poloïdal, les particules s'évalent en partant dans une direction parallèle à Oz ; le champ poloïdal crée un gradient de champ magnétique ; s'il est supérieur à celui produit par la courbure du tore, alors, après avoir tourné de 180° autour du cercle moyen du tore, les particules prennent une dérive opposée, aussi elles oscillent autour du cercle moyen du tore. L'énoncé suggère que les particules oscillent autour du plan équatorial du tore ; en fait, c'est vrai, mais ce n'est pas un bon argument pour comprendre la stabilité.

En raison du gradient du champ magnétique dû à la distance à l'axe Oz , en réalité les trajectoires sont centrées par rapport à un cercle un peu plus grand que le cercle moyen du tore.

IX.d)

Le module du champ magnétique $\sqrt{\left(\frac{B_0}{1+(r/R)\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}\right)^2}$ varie sur la trajectoire parce que θ varie. D'après la question VII, les particules peuvent être piégées et osciller sur une ligne de champ entre deux positions où le champ magnétique est assez grand pour les réfléchir.

IX.e)

Pour ces particules, l'effet de dérive n'est pas compensé, car elles ne sont pas également dans toutes les directions autour du cercle moyen, aussi la dérive due au gradient du champ magnétique a une direction moyenne et ne se compense pas. Notons aussi que le sens de la dérive ne dépend pas du sens de la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique et donc que cette dérive ne se compense pas sur un aller et sur le retour suivant.