



Nombres complexes

Les nombres complexes prennent naissance au XVI^{ème} siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.

En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré. À cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.

La notation i apparaît en 1777 avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.

Au XIX^{ème} siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.



I. L'ensemble $\mathbb{C}$

1. Définition

Définition

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Exemples

$3 + 4i$; $-2 - i$ et $\frac{i}{3}$ sont des nombres complexes.

Vocabulaire

- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z .
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et le nombre b s'appelle la **partie imaginaire**.

On note $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$.

Remarques

- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors z est un nombre **imaginaire pur**.

Méthode

Effectuer des calculs sur les nombres complexes

Vidéo <https://youtu.be/-aaSfL2fhTY>

Vidéo <https://youtu.be/1KQIUqzVGqQ>

Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2$$

$$z_4 = (2i)^{13}$$

$$z_5 = \frac{1}{4-2i}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{2-i}$$

Solution

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2$$

$$z_1 = 3 - 5i - 3i + 4$$

$$z_2 = -3 + 15i + 2i - 10i^2$$

$$z_3 = 4 - 12i + 9i^2$$

$$z_1 = 7 - 8i$$

$$z_2 = -3 + 15i + 2i + 10$$

$$z_3 = 4 - 12i - 9$$

$$z_2 = 7 + 17i$$

$$z_3 = -5 - 12i$$

$$z_4 = (2i)^{13}$$

$$z_4 = 2^{13} i^{13}$$

$$z_4 = 8192 \times (i^2)^6 \times i$$

$$z_4 = 8192 \times (-1)^6 \times i$$

$$z_4 = 8192i$$

$$z_5 = \frac{1}{4-2i}$$

$$z_5 = \frac{4+2i}{(4-2i)(4+2i)}$$

$$z_5 = \frac{4+2i}{16-4i^2}$$

$$z_5 = \frac{4+2i}{16+4}$$

$$z_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$$

$$z_6 = \frac{1+i}{2-i}$$

$$z_6 = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$z_6 = \frac{2+i+2i-1}{4+1}$$

$$z_6 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Propriétés

- Deux nombres complexes sont **égaux**, si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est **nul**, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Exemple d'application

Déterminons le nombre complexe z vérifiant $2z - 5 = 4i + z$

Solution

$$2z - z = 5 + 4i$$

$$z = 5 + 4i$$

2. Représentation dans le plan complexe

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définitions

Soient a et b deux nombres réels.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées $(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$
- À tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple

 Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point $M(3; 2)$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$

De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3 + 2i$

Propriétés

$M(z_M)$ et $N(z_N)$ sont deux points du plan.

$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.

a. Le vecteur $\vec{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$

b. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$

c. Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz

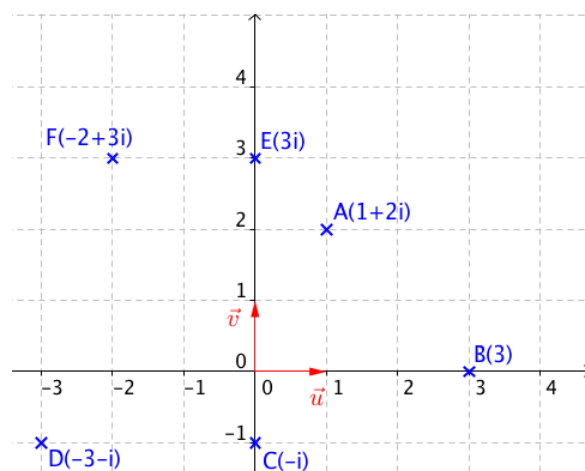
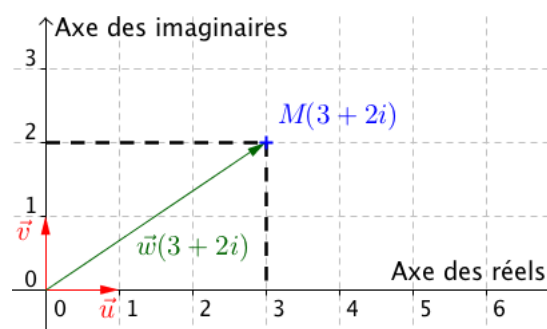
d. Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe

$$z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$$

Démonstration

a. On pose $M(x_M; y_M)$ et $N(x_N; y_N)$. Le vecteur $\vec{MN}$ a pour coordonnées $(x_N - x_M; y_N - y_M)$ donc son affixe est égal à

□ 2 □



$$x_N - x_M + i(y_N - y_M) = x_N + iy_N - (x_M + iy_M) = z_N - z_M$$

b. et c. Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples

Voir ci-contre

II. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit un nombre complexe $z = a + ib$. On appelle **nombre complexe conjugué** de z , le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$

Exemples

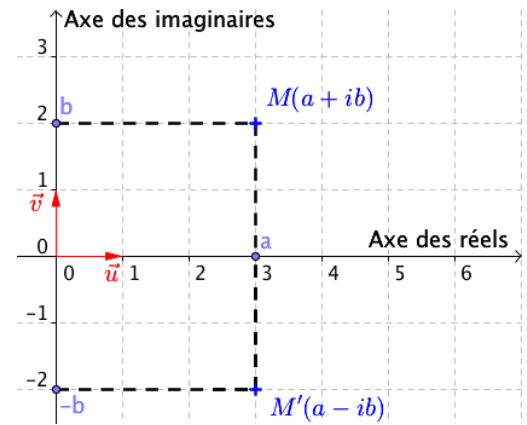
Si $z = 4 + 5i$ alors $\bar{z} = 4 - 5i$

On peut également noter

$$7 - 3i = 7 + 3i \quad \bar{i} = -i \quad \bar{5} = 5$$

Remarque

Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont **symétriques par rapport à l'axe des réels**.



Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} a. \bar{\bar{z}} &= z & b. \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z'} & c. \overline{z \times z'} &= \bar{z} \times \bar{z'} \\ d. \overline{z^n} &= \bar{z}^n & e. \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}}, z \neq 0 & f. \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}, z' \neq 0 \end{aligned}$$

Démonstrations

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' réels.

$$a. \bar{\bar{z}} = \overline{a + ib} = a - ib = a + ib = z$$

$$b. \overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'} = \overline{a + a' + i(b + b')} = a + a' - i(b + b') = a + a' - ib - ib' = \bar{z} + \bar{z'}$$

Démonstrations analogues pour **c. e.** et **f.**

d. On procède par récurrence.

- L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.

- **Hérédité**

Hypothèse de récurrence

Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie $\bar{\bar{z}^k} = z^k$

Démontrons que la propriété est vraie au rang $k + 1$ $\bar{\bar{z}^{k+1}} = z^{k+1}$

$$\bar{\bar{z}^{k+1}} = \overline{\bar{z}^k \times z} = \overline{\bar{z}^k} \times \bar{z} = z^k \times \bar{z} = z^{k+1}$$

- **Conclusion**

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit $\bar{\bar{z}^n} = z^n$

Propriétés

$$z \text{ est réel} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

Démonstrations

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow a + ib = -a + ib \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Remarque

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \in i\mathbb{R}$$

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$

Démonstration

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

Méthode

Déterminer un conjugué

 **Vidéo** <https://youtu.be/WhKHo9YwafE>

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2 - i)(i - 5)$$

$$z_2 = \frac{3+2i}{i}$$

Solution

$$\overline{z_1} = \overline{(2 - i)(i - 5)}$$

$$\overline{z_1} = \overline{(2 - i)(i - 5)}$$

$$\overline{z_1} = (2 + i)(-i - 5)$$

$$\overline{z_1} = -2i - 10 + 1 - 5i$$

$$\overline{z_1} = -9 - 7i$$

$$\overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3+2i}{i}\right)}$$

$$\overline{z_2} = \frac{\overline{3+2i}}{\overline{i}}$$

$$\overline{z_2} = \frac{3-2i}{-i}$$

$$\overline{z_2} = \frac{(3-2i) \times i}{-i \times i}$$

$$\overline{z_2} = 2 + 3i$$

III. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition

Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$

On appelle **discriminant** du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$

Propriété

Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$

▪ Si $\Delta > 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède **deux solutions réelles** distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▪ Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution réelle

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

▪ Si $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration

On met le trinôme sous sa forme canonique.

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c = a\left(z^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

▪ Si $\Delta > 0$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \vee \left(z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

▪ Si $\Delta = 0$

L'équation peut s'écrire

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'admet qu'une seule solution réelle $z_0 = -\frac{b}{2a}$

▪ Si < 0

$= i^2 \times (-) = (i\sqrt{-})^2$ donc l'équation peut s'écrire

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(z = \frac{-b-i\sqrt{-}}{2a}\right) \vee \left(z = \frac{-b+i\sqrt{-}}{2a}\right)$$

Remarque

▪ Si $= 0, az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$

▪ Si $\neq 0, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Méthode

Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

 **Vidéo** <https://youtu.be/KCnorHy5FE4>

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a. $z^2 + 5 = 0$

b. $z^2 + 3z + 4 = 0$

Solution

a. $z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -5 \Leftrightarrow z^2 = 5i^2 \Leftrightarrow (z = -i\sqrt{5}) \vee (z = i\sqrt{5})$

Les solutions sont donc $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$

b. $z^2 + 3z + 4 = 0$

On calcule de discriminant du trinôme $= 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$

< 0 donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$ et $z_2 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$

IV. Module et argument d'un nombre complexe

1. Module

Définition

Soit un nombre complexe $z = a + ib$. On appelle **module** de z ,

le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$

Si M est un point d'affixe z , alors le module de z est égal à la distance OM .

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes.

a. $|z|^2 = z\bar{z}$ **b.** $|\bar{z}| = |z|$ **c.** $|-z| = |z|$

Démonstrations

a. $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

b. $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

c. $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Méthode

Calculer le module d'un nombre complexe

 **Vidéo** <https://youtu.be/Hu0jjS502u4>

Calculer

a. $|3 - 2i|$

b. $|-3i|$

c. $|\sqrt{2} - i|$

Solution

a. $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

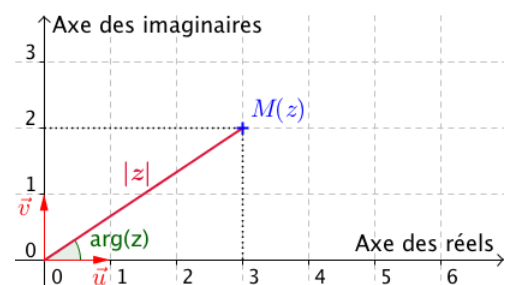
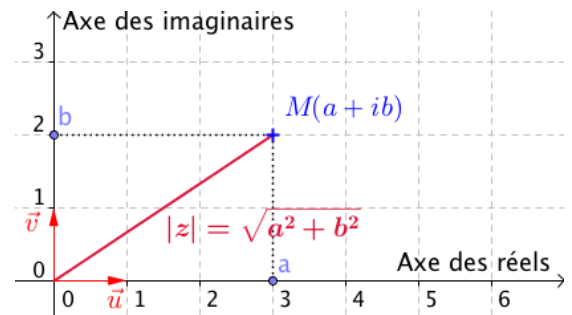
b. $|-3i| = |-3| \times |i| = 3 \times 1 = 3$

c. $|\sqrt{2} - i| = |\sqrt{2} - i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$

2. Argument

Définition

Soit un point M d'affixe z non nulle. On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}; \vec{OM})$.



Remarques

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
On notera $\arg(z)$ modulo 2π ou $\arg(z) [2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}; \vec{OM})$ n'est pas défini.

Exemple

 Vidéo <https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4>

Soit $z = 3 + 3i$

$$|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul.

a. $z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = 0 [\pi]$

b. $z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$

c. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

d.

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi$$

Démonstrations

a. Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.

b. Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.

c. d. Ses résultats se déduisent par symétrie.

V. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Définition

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose

$$\theta = \arg(z)$$

On a alors $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$

Définition

On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec

$$\theta = \arg(z)$$

Méthode

Écrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique.

 Vidéo <https://youtu.be/zlbpXlglSc4>

Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

Solution

On commence par calculer le module de z .

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

En calculant $\frac{z}{|z|}$ on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire.

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z tel que

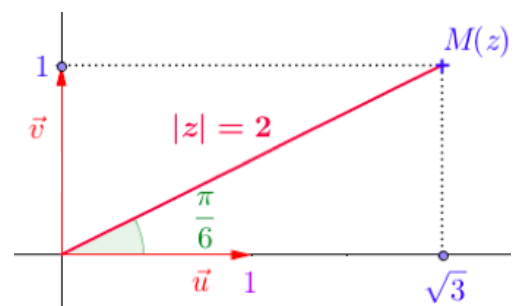
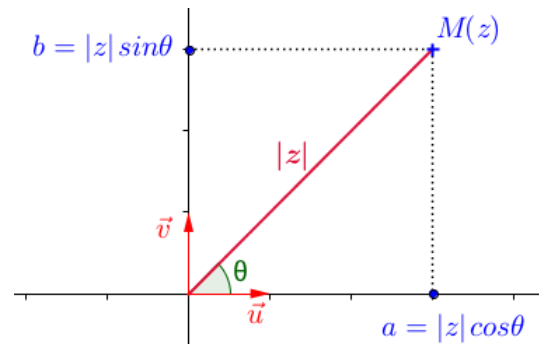
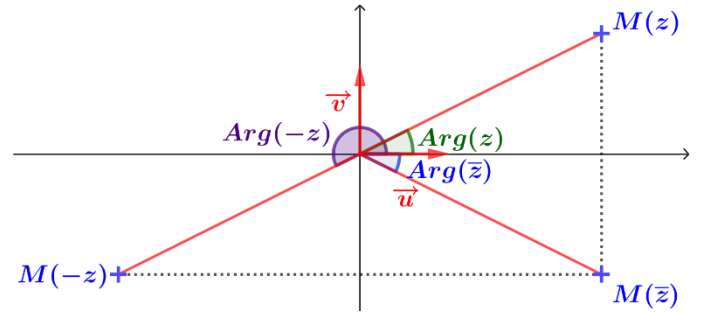
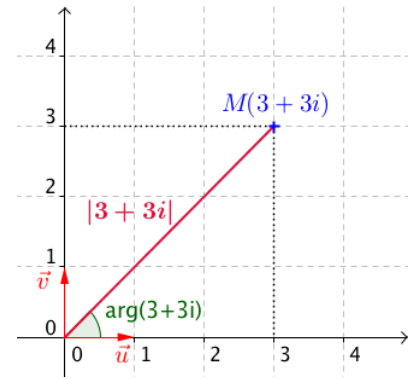
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\frac{z}{|z|} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ avec } \arg(z) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

Avec une calculatrice ou un logiciel, il est possible de vérifier les résultats obtenus :



$ \sqrt{3} + i $	2
$\text{angle}(\sqrt{3} + i)$	$\frac{\pi}{6}$

2. Propriétés

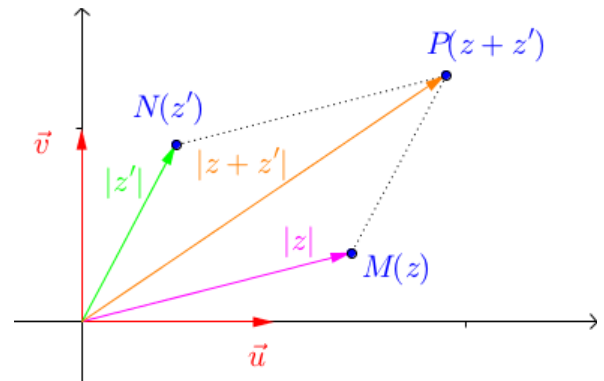
Inégalité triangulaire

Soit z et z' deux nombres complexes.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration

Il s'agit d'une traduction algébrique de l'inégalité triangulaire.



Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes **non nuls** et n entier naturel non nul.

Opération

Module

Argument

Produit

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\arg \arg (zz') = \arg \arg (z) + \arg \arg (z')$$

Puissance

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg \arg (z^n) = n \times \arg \arg (z)$$

Inverse

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\arg \arg \left(\frac{1}{z} \right) = -\arg \arg (z)$$

Quotient

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg \arg \left(\frac{z}{z'} \right) = \arg \arg (z) - \arg \arg (z')$$

Démonstration pour le produit

On pose $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$

$$zz' = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$zz' = |z||z'|[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')]$$

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$ et un argument de zz' est $\theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$

VI. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Définition

Posons $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. En prenant $|z| = |z'| = 1$, on a démontré dans la partie II que

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$$

Soit $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$

On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles

$$e^{\theta} e^{\theta'} = e^{\theta + \theta'}$$

Définition

Pour tout réel θ , $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Remarque

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de **module 1** et **d'argument θ** .

Propriété

$$e^{i\pi} = -1$$

Démonstration

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \times 0 = -1$$

Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π).



Exemples

$$e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \times 0 = 1 = e^0$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$$

Définition

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = re^{i\theta}$

2. Propriétés

Propriétés

Soit des réels θ et θ' , et n un entier naturel non nul,

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Remarque

La deuxième formule s'appelle la **formule de Moivre**.

Méthode

Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

 **Vidéo** <https://youtu.be/tEKJVKKQazA>

 **Vidéo** <https://youtu.be/zdxRt5poJp0>

1. Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a. $z_1 = -2i$ b. $z_2 = -5$

2. Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

a. $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b. $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Solution

1. a. $|z_1| = |-2i| = 2$

$$\frac{z_1}{|z_1|} = -\frac{2i}{2} = -i$$

On cherche donc un argument θ de z_1 tel que $\cos \cos \theta = 0$ et $\sin \sin \theta = -1$

Or, $\cos \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ donc l'argument $-\frac{\pi}{2}$ convient.

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

1. b. $|z_2| = |-5| = 5$

$$\frac{z_2}{|z_2|} = -\frac{5}{5} = -1$$

On cherche donc un argument θ de z_2 tel que $\cos \cos \theta = -1$ et $\sin \sin \theta = 0$

Or, $\cos \cos \pi = -1$ et $\sin \sin \pi = 0$ donc l'argument π convient.

$$z_2 = 5e^{i\pi}$$

2. a. $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

2. b. $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \sin \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

VII. Applications à la géométrie

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D

a. $(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

b. $AB = |z_B - z_A|$

c. $(\vec{AB}; \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Démonstrations

a. On considère un point E tel que $\vec{OE} = \vec{AB}$. L'affixe de E est $z_B - z_A$ donc

$$(\vec{u}; \vec{AB}) = (\vec{u}; \vec{OE}) = \arg \arg (z_B - z_A)$$

b. $|z_B - z_A| = |z_E| = OE = AB$

c. $(\vec{AB}; \vec{CD}) = (\vec{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{CD}) = (\vec{u}; \vec{CD}) - (\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Méthode

Utiliser les nombres complexes en géométrie

 Vidéo <https://youtu.be/NjLZfbqRFB0>

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$

1. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution

1. $AB = |z_B - z_A| = |1 - 2i - (-2 - i)| = |3 - i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |-1 + 2i - (-2 - i)| = |1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

Donc $AB = AC$ et le triangle ABC est isocèle en A.

2. $(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+9i-3}{3^2-i^2} = \frac{10i}{10} = i$$

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On en déduit que l'angle $\hat{BAC}$ est droit.

Remarque

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| = 1 \text{ donc } AC = AB$$

Méthode

Déterminer un ensemble de points

 Vidéo <https://youtu.be/WTXu19XC9Lw>

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer et représenter

1. L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$

2. L'ensemble des points M tels que $|\bar{iz} - 3| = 1$

3. L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$

4. L'ensemble des points M tels que $\arg \arg (z) = \frac{\pi}{4} [\pi]$

Solution

1. Soit A le point d'affixe $2i$

$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$$

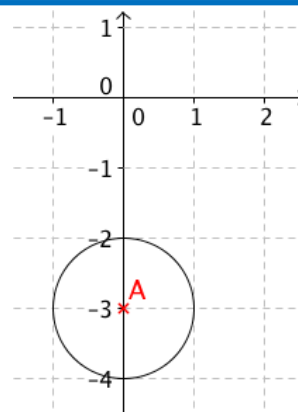
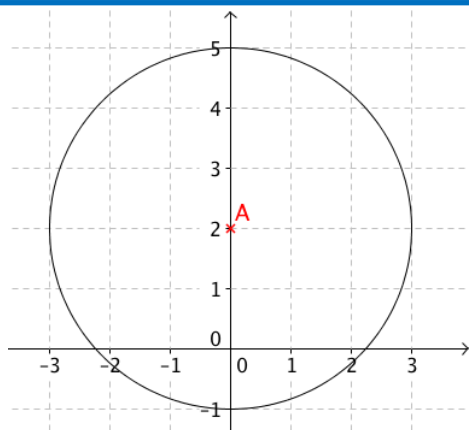
L'ensemble des points M est le cercle de centre A(2i) et de rayon 3.

2. $|\bar{iz} - 3| = |\bar{i}(z + 3i)| = |\bar{i}| |z + 3i| = |z + 3i|$

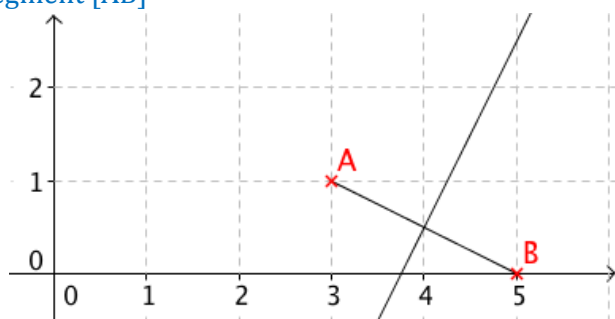
Soit A le point d'affixe $-3i$

$$|\bar{iz} - 3| = 1 \Leftrightarrow |z + 3i| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre A(-3i) et de rayon 1.



3. $|\bar{z} - 3 + i| = |\overline{\bar{z} - 3 + i}| = |z - 3 - i|$
 Soit A le point d'affixe $3 + i$ et B le point d'affixe 5
 $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5| \Leftrightarrow |z - (3 + i)| = |z - 5|$
 $\Leftrightarrow AM = BM$
 L'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB]



4. L'ensemble des points M est la première bissectrice privée de l'origine.

