Clément Marchal

I. Portrait de la fonction cube et résolution de l'inéquation

$$x^2 < 7x - 12$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? La fonction f est-elle paire ou impaire ? Que peut-on alors dire de sa courbe représentative ?
2. Que peut-on dire du signe de $f - 1$?
3. Justifie que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la dérivée de f
4. Donne le tableau de variations de f et trace la courbe représentative de f dans un repère.
5. Donne l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 1$

Kencilya Mian

I. Portrait de la fonction inverse et résolution de l'inéquation

$$4x^2 > 20x - 25$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (2x + 5)e^x$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Justifie que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la dérivée de f
3. Donne le tableau de variations de f.
4. Donne l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$.
5. On considère la fonction g définie sur R par

$$g(x) = \frac{x-5}{2}$$

Après avoir donné le domaine de définition et de dérivabilité de $h = f\circ g$, donne une expression de h et de h'
6. Déduis-en les variations de h.

Shirak Pogosyan

I. Portrait de la fonction racine carrée et résolution de l'inéquation

$$-3x^2 \leq -2x + 1$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln ln\,(1 + x)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Calcule la dérivée de f
3. Donne le tableau de variations de f et trace la courbe représentative de f dans un repère.
4. Donne l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$.
5. On considère la fonction carré g définie sur R par

$$g(x) = x^2$$

Après avoir donné le domaine de définition et de dérivabilité de $h = f\circ g$, donne une expression de h et de h'
6. Déduis-en les variations de h.

Clément Marchal

I. Portrait de la fonction cube et résolution de l'inéquation

$$x^2 < 7x - 12$$

$$x^2 < 7x - 12 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 < 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1 > 0$$

L'expression $x^2 - 5x + 6$ admet donc deux racines

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2} = 4$

L'expression $x^2 - 7x + 12$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur de ses racines donc

$$S =]3; 4[$$

Remarque

On aurait aussi pu factoriser l'expression

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Et faire un tableau de signes

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? La fonction f est-elle paire ou impaire ? Que peut-on alors dire de sa courbe représentative ?

f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas donc elle est définie sur R

$$D_f = R$$

Cet ensemble est symétrique par rapport à 0

$$\forall x \in D_f, \quad -x \in D_f$$

On peut donc examiner la parité de la fonction f. Soit $x \in R$,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$$

La fonction f est donc **paire.** Sa courbe représentative présente donc un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$

2. Que peut-on dire du signe de $f - 1$?

Soit $x \in R$,

$$f(x) - 1 = \frac{x^2-1}{x^2+1} - 1 = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2+1} = -\frac{2}{x^2+1} < 0$$

3. Justifie que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la dérivée de f

La fonction f est dérivable sur R en tant que quotient de fonctions polynômes dérivables sur R dont le dénominateur ne s'annule pas sur R.

PS : on peut aussi dire que f est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition.

Soit $x \in R$, $f(x)$ est de la forme

$$\frac{u(x)}{v(x)}$$

Où

$$u(x) = x^2 - 1$$

Et

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$f'(x) = \left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

4. Donne le tableau de variations de f et trace la courbe représentative de f dans un repère.

Soit $x \in R$, $f'(x)$ est du signe de x donc

$f(0) = \frac{0^2-1}{0^2+1} = -1$

Soit $x \in R^*$,

$f(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

$f(x) = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

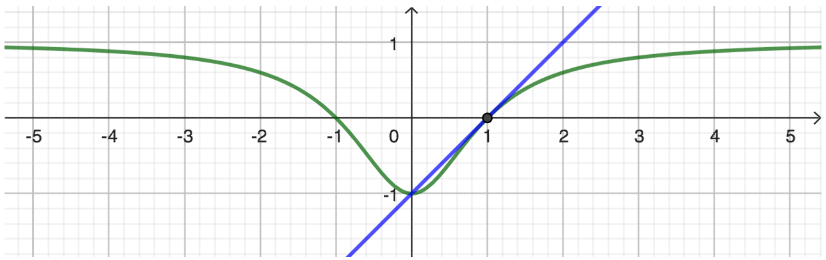
Or,

$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

Donc, par quotient des limites,

$f(x) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1



5. Donne l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 1$

L'équation de la tangente en $a = 1$ est donnée par

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Or,

$$f(1) = \frac{1^2-1}{1^2+1} = 0$$

$$f'(1) = \frac{4\times 1}{(1^2+1)^2} = 1$$

Donc, l'équation est $\quad y = x - 1$

Kencilya Mian

I. Portrait de la fonction inverse et résolution de l'inéquation

$$4x^2 > 20x - 25$$

$$4x^2 > 20x - 25 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 400 = 0$$

L'expression $4x^2 - 20x + 25$ admet donc une seule racine double

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{20}{8} = 2,5$

L'expression $4x^2 - 20x + 25 = 4(x - 2,5)^2$ est du signe de $a = 4$ donc

$$S = R\backslash\{2,5\}$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (2x + 5)e^x$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

La fonction f est le produit de deux fonctions définies sur R donc

$$D_f = R$$

2. Justifie que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la dérivée de f

La fonction f est dérivable sur R en tant que produit de fonctions dérivables sur R.

Soit $x \in R$,

$$f'(x) = 2e^x + (2x + 5)e^x = (2x + 7)e^x$$

3. Donne le tableau de variations de f.

Soit $x \in R$, $f'(x)$ est du signe de $2x + 7$ et s'annule en $-3,5$

$$f(-3,5) = -2e^{-3,5} \approx -0,06$$

Par croissance comparée et par produit des limites,

$f(x) = 0$ et $f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-3.5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-2e^{-3,5}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Donne l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$.

L'équation de la tangente en $a = 0$ est donnée par

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Or, $f(0) = 5$ et $f'(0) = 7$

Donc, l'équation est $y = 7x + 5$

5. On considère la fonction g définie sur R par

$$g(x) = \frac{x-5}{2}$$

Après avoir donné le domaine de définition et de dérivabilité de $h = f \circ g$, donne une expression de h et de h'

La fonction h est définie et dérivable sur R en tant que composée de fonctions définies et dérivables sur R. Soit $x \in R$,

$$h(x) = f\left(\frac{x-5}{2}\right) = xe^{\frac{x-5}{2}}$$

$$h'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = \frac{1}{2}(x + 2)e^{\frac{x-5}{2}}$$

6. Déduis-en les variations de h.

$h'(x)$ est du signe de $x + 2$. On en déduit que la fonction h est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2[$ et croissante sur l'intervalle $]-2; +\infty[$

Shirak Pogosyan

I. Portrait de la fonction racine carrée et résolution de l'inéquation

$$-3x^2 \leq -2x+1$$

$$-3x^2 \leq -2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2 - 2x + 1$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$

L'expression $3x^2 - 2x + 1$ n'admet donc aucune racine, elle est donc du signe de $a = 3$ donc

$$S = R$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln ln\,(1+x)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

$\ln ln\,(1+x)$ est définie si $x+1 > 0$ donc

$$D_f =]-1; +\infty[$$

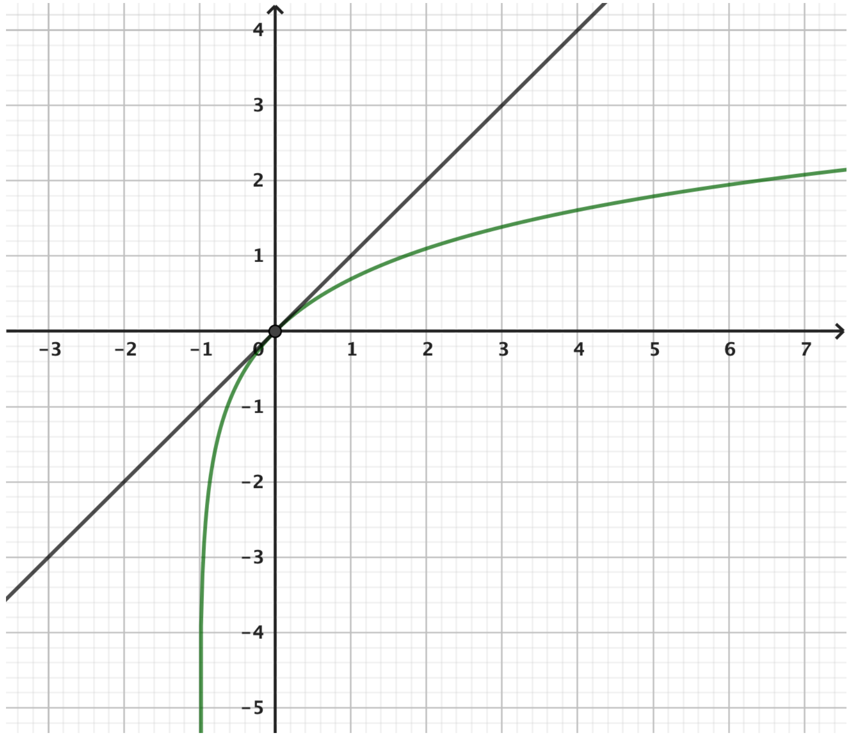
2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Calcule la dérivée de f

La fonction f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ en tant que composée de la fonction logarithme et d'une fonction dérivable et strictement positive sur $]-1; +\infty[$. Soit $x \in]-1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

3. Donne le tableau de variations de f et trace la courbe représentative de f dans un repère.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



4. Donne l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$.

L'équation de la tangente en $a = 0$ est donnée par

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Or, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Donc, l'équation est $y = x$

5. On considère la fonction carré g définie sur R par

$$g(x) = x^2$$

Après avoir donné le domaine de définition et de dérivabilité de $h = f\circ g$, donne une expression de h et de h'

La fonction h est définie et dérivable sur R en tant que composée de la fonction logarithme et d'une fonction dérivable et strictement positive sur R. Soit $x\in R$,

$$h(x) = \ln ln\,(1 + x^2)$$

$$h^{'}(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

6. Déduis-en les variations de h.

D'après la question précédente, $h^{'}(x)$ est du signe de x donc la fonction h est décroissante sur R_{-} et croissante sur R_{+}