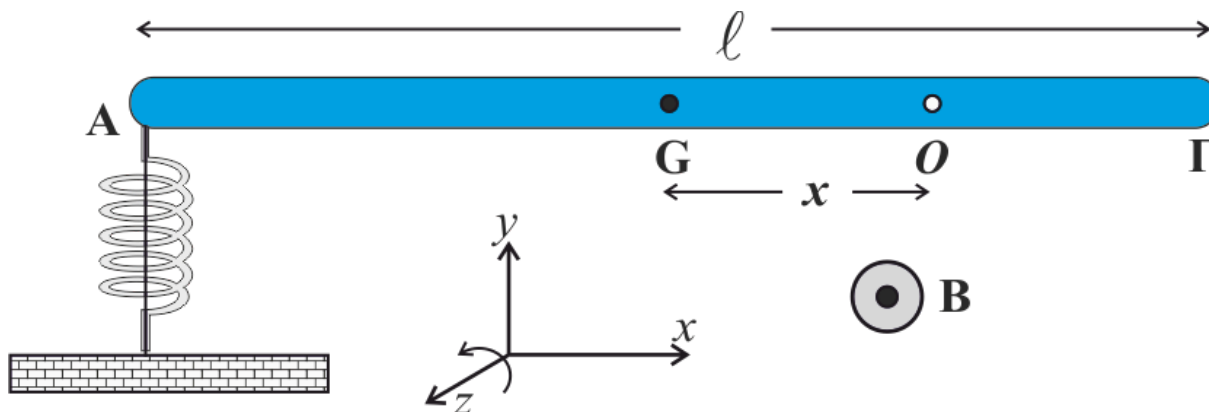


Ελατήριο Ωθεί Ράβδο Σε Στροφική Κίνηση Εντός Μαγνητικού Πεδίου

Εκφώνηση: Λεπτή ομογενής σιδερένια ράβδος AB, μάζας $m = 15 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 1,5 \text{ m}$, αρθρώνεται στο σημείο O (μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα διερχομένου από το O) που απέχει $x = 0,45 \text{ m}$ από το κέντρο μάζας G. Το άκρο A ακουμπά σε ένα κατακόρυφο ελατήριο, σταθεράς $k = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}$, που είναι συσπειρωμένο κατά $d = 0,025 \text{ m}$ με τη βοήθεια νήματος που συνδέει το άκρο A της ράβδου και της βάσης που κρατά στερεωμένο το ελατήριο. Η ράβδος υπό αυτές τις συνθήκες είναι οριζόντια. Κόβουμε το νήμα απελευθερώνοντας την πάνω άκρη του ελατηρίου που ωθεί προς τα πάνω τη ράβδο η οποία χάνοντας την επαφή με το ελατήριο εκτελεί στροφική κίνηση. Υποθέτοντας για λόγους ευκολίας και ευλόγως (2 μοίρες περίπου περιστροφή) ότι κατά την αποσυμπίεση του ελατηρίου η ράβδος παραμένει οριζόντια να προσδιορίσετε σε συνάρτηση της γωνίας περιστροφής φ :



Σχήμα 1: Σχήμα εκφώνησης. Το μαγνητικό πεδίο κάθετο στη σελίδα με κατεύθυνση προς τον αναγνώστη.

1. Τη γωνιακή ταχύτητα και τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
2. Την αντίδραση στην άρθρωση O.
3. Το ρυθμό μεταβολής της συνολικής στροφορμής ως προς O, της ιδιοστροφορμής και της τροχιακής στροφορμής ως προς O.
4. Την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου (η περιστροφή γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο που ορίζεται από τον αρχικό οριζόντιο προσανατολισμό της ράβδου) αν το επίπεδο περιστροφής είναι κάθετο προς ομογενές οριζόντιο μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 1 \text{ T}$ (όπως στο Σχήμα 1).

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ράβδου $I_G = \frac{1}{12} m \ell^2$ (ως προς άξονα κάθετου στη ράβδο και

διερχομένου από το κέντρο μάζας της G) και η $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Απάντηση: Το ελατήριο αποσυμπιεζόμενο ασκεί δύναμη στο άκρο Α της ράβδου μεταφέροντας, μέσω του παραγόμενου έργου της, όλη την ελαστική του δυναμική ενέργεια

$E = \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}3 \cdot 10^5 \cdot 0,025^2 = 93,75 \text{ J}$ στη ράβδο με μορφή στροφική κινητική. Η ράβδος εκτελώντας στροφική κίνηση περί το Ο επιβραδύνεται, λόγω της ροπής του βάρους, μέχρι την κατακόρυφη θέση (εφόσον «καταφέρει» να κινηθεί μέχρι αυτή τη θέση).

Προσδιορισμός γωνιακής ταχύτητας

Έστω ότι όταν η ράβδος έχει περιστραφεί κατά γωνία ϕ η γωνιακή της ταχύτητα είναι ω . Η μηχανική ενέργεια E της ΑΓ διατηρείται, μέσω του αρνητικού έργου του συντηρητικού βάρους κατά την περιστροφή της μέχρι να γίνει κατακόρυφη (αν γίνει) μετασχηματίζεται από κινητική εκ περιστροφής σε βαρυτική δυναμική. Με σημείο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας την αρχική θέση του κέντρου μάζας, όταν η ράβδος ήταν οριζόντια, τότε για οποιαδήποτε γωνία ϕ (και για το συγκεκριμένο x) η γωνιακή του ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση

$$E = mgx \sin \phi + \frac{1}{2} I_O \omega^2 \rightarrow E = mgx \sin \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m \ell^2 + m x^2 \right) \omega^2 \rightarrow$$

$$E - mgx \sin \phi = \frac{12x^2 + \ell^2}{24} m \omega^2 \rightarrow \boxed{\omega^2 = 24 \frac{E - mgx \sin \phi}{m(12x^2 + \ell^2)}}$$

$$\omega^2 = 24 \frac{93,75 - 15 \cdot 9,81 \cdot 0,45 \sin \phi}{15(12 \cdot 0,45^2 + 1,5^2)} = 24 \frac{93,75 - 66,22 \sin \phi}{70,2}$$

$$\boxed{\omega^2 = 32,05 - 22,64 \sin \phi \geq 0} \rightarrow \omega^2(90^\circ) = 9,41 \rightarrow \omega(90^\circ) = 3,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για να είναι δυνατή η περιστροφή μέχρι μια συγκεκριμένη γωνία $\phi_{\max}$ για την οποία μηδενίζεται η ω

πρέπει $E = mgx \sin \phi_{\max}$ ή $\sin \phi_{\max} = \frac{E}{mgx}$. Με τα δεδομένα προκύπτει $\sin \phi_{\max} = 1,42$ που σημαίνει

ότι η μεταβιβαζόμενη από το ελατήριο ενέργεια είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη για τον κατακόρυφο προσανατολισμό της ράβδου (μέγιστη ανύψωση κέντρου μάζας) και διέρχεται όταν

$\phi_{\max} = 90^\circ$ έχοντας κινητική εκ περιστροφής ενέργεια με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 3,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Με τη

συγκεκριμένη αρχική ενέργεια για να περάσει μόλις την κατακόρυφη θέση πρέπει η απόσταση του κέντρου

μάζας από τον άξονα περιστροφής να είναι ακριβώς $x = \frac{E}{mg} = 0,63 \text{ m}$. Για μεγαλύτερες αποστάσεις x η

ράβδος δεν μπορεί να γίνει κατακόρυφη. Για παράδειγμα αν ο άξονας περιστροφής βρισκόταν στην άκρη

$$\sin \phi_{\max} = \frac{E}{mgx} = \frac{93,75}{15 \cdot 9,81 \cdot 0,75} = 0,85 \rightarrow \phi_{\max} = 58,2^\circ$$

Β της ράβδου ($x = \ell / 2 = 0,75 \text{ m}$, τότε

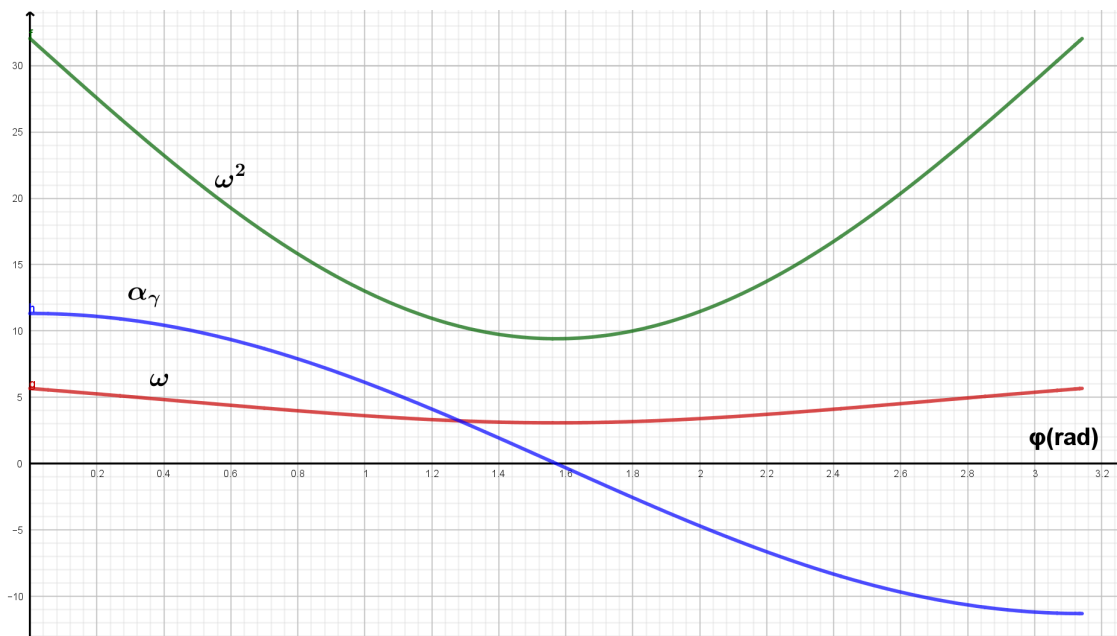
Προσδιορισμός γωνιακής επιτάχυνσης και αντίδρασης από τον άξονα

Για να προσδιορίσουμε την αντίδραση στην άρθρωση Ο εφαρμόζουμε για τον τυχαίο προσανατολισμό της ράβδου το θεμελιώδη νόμο με τη γωνιακή του εκδοχή (περιστροφή περί το Ο) και με τη γραμμική του εκδοχή (κίνηση του κέντρου μάζας). Συνδέουμε τις επιταχύνσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, του κέντρου μάζας με τη γωνιακή επιτάχυνση και τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου. Το κέντρο μάζας κινούμενο διαγράφει κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα x , οπότε υπόκειται σε ακτινική (κεντρομόλο) και εφαπτομενική (επιτρόχιο λόγω γωνιακής επιτάχυνσης).

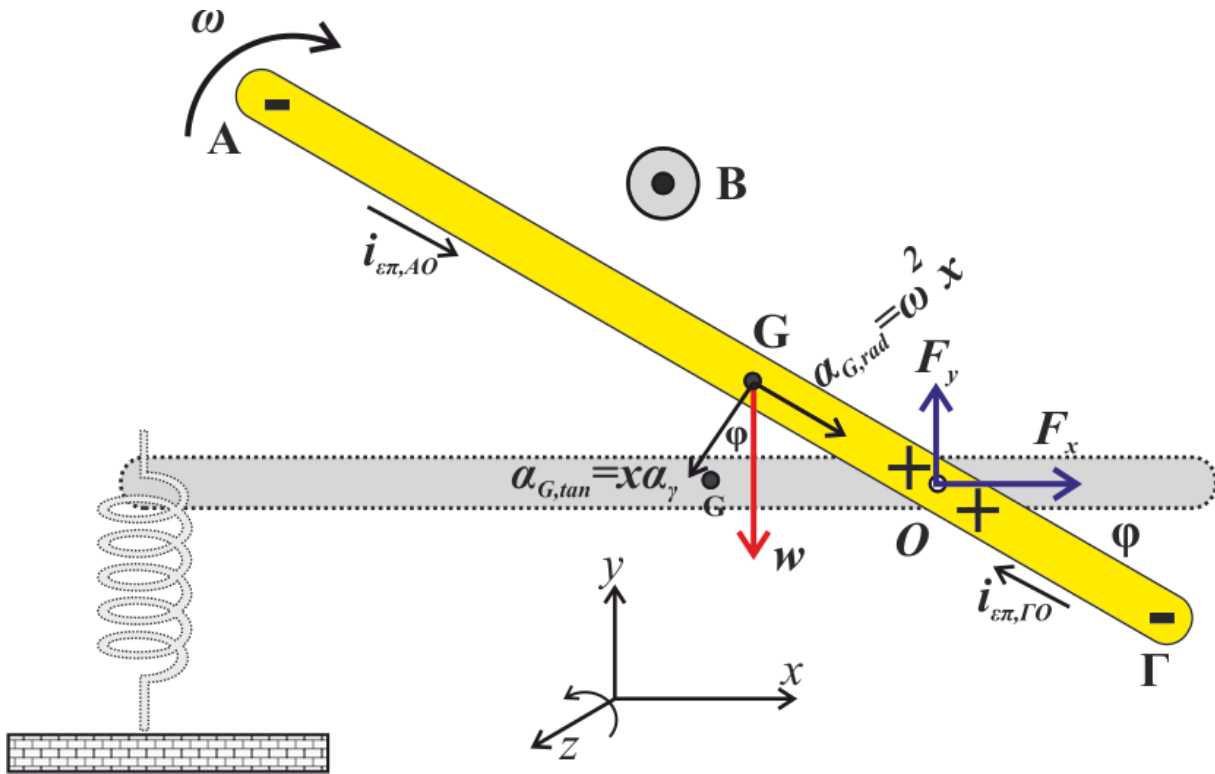
$$\Theta \Sigma \text{Κ} (+ \odot) \sum \tau_O = I_O a_\gamma \rightarrow \tau_{w/O} + \tau_{F_{αξ./O}} = I_O a_\gamma \rightarrow mgx \cos \phi = \left(\frac{1}{12} m \ell^2 + m x^2 \right) a_\gamma \rightarrow$$

$$a_\gamma = 12 \frac{gx \cos \phi}{12x^2 + \ell^2} \rightarrow a_\gamma = 11,32 \cos \phi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \rightarrow a_\gamma(0^\circ) = 11,32 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, a_\gamma(90^\circ) = 0$$

Η μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση επιτυγχάνεται στον αρχικό οριζόντιο προσανατολισμό (μέγιστη ροπή του βάρους) και η ελάχιστη (μηδενική) στον κατακόρυφο (μηδενική ροπή του βάρους). Αναμενόμενα.



Σχήμα 2: Γραφικές παραστάσεις των αναγραφόμενων μεγεθών σε συνάρτηση της γωνίας περιστροφής ϕ . Η συμμετρία τους με άξονα συμμετρίας την ευθεία $\phi = \pi / 2 = 90^\circ$ εύκολα ερμηνεύσιμη.

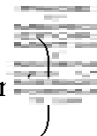


Σχήμα 3: Οι ασκούμενες δυνάμεις, οι επιταχύνσεις του κέντρου μάζας και οι πολικότητες των αναπτυσσόμενων ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων στα δύο τμήματα της ράβδου

Σύνδεση γωνιακής ταχύτητας και γωνιακής επιτάχυνσης με τις επιταχύνσεις του κέντρου μάζας (Σχήμα 3).

$$\begin{pmatrix} a_{\tan,G} = x a_\gamma \\ a_{rad,G} = \omega^2 x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{G,x} = \omega^2 x \cos \phi - a_\gamma x \sin \phi = x (\omega^2 \cos \phi - a_\gamma \sin \phi) \\ a_{G,y} = -\omega^2 x \sin \phi - a_\gamma x \cos \phi = -x (\omega^2 \sin \phi + a_\gamma \cos \phi) \end{cases}$$

Υπολογισμός οριζόντιας συνιστώσας αντίδρασης από τον άξονα.



$$(\Theta N \xrightarrow{+x}) \sum F_x = m a_{G,x} \rightarrow F_{O,x} = m x (\omega^2 \cos \phi - a_y \sin \phi) = m x \left(24 \frac{E - mgx \sin \phi}{m(12x^2 + \ell^2)} \cos \phi - 12 \frac{gx \cos \phi}{12x^2 + \ell^2} \sin \phi \right)$$

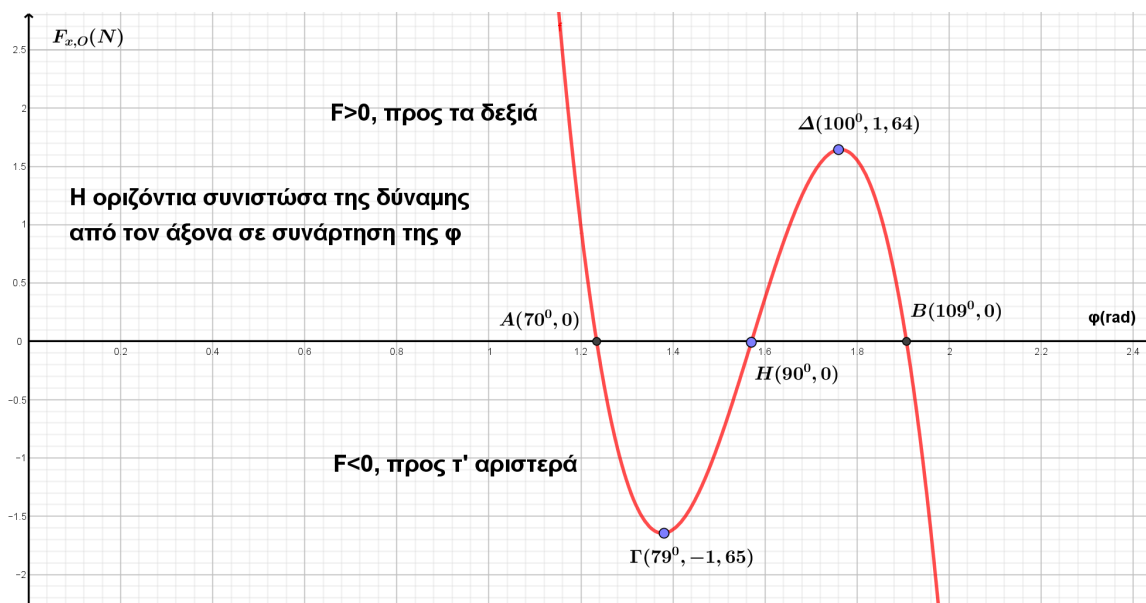
$$12mx \left[\frac{2E - 2mgx \sin \phi}{m(12x^2 + \ell^2)} \cos \phi - \frac{gx \cos \phi}{12x^2 + \ell^2} \sin \phi \right] \rightarrow$$

$$\boxed{F_{O,x} = \frac{12x \cos \phi}{12x^2 + \ell^2} (2E - 3mgx \sin \phi)} \rightarrow F_{O,x} = 1,15 \cos \phi (187,50 - 198,65 \sin \phi) \rightarrow$$

$$187,50 - 198,65 \sin \phi \geq 0 \rightarrow \sin \phi \leq \frac{187,50}{198,65} = 0,94 \rightarrow \phi \in (0, 70^\circ = 1,22 \text{ rad}) \cup (110^\circ = 1,92 \text{ rad}, 180^\circ)$$

$$F_{O,x} \begin{cases} > 0, \phi \in (0, 70^\circ) \\ < 0, \phi \in (70^\circ, 90^\circ) \\ > 0, \phi \in (90^\circ, 110^\circ) \\ < 0, \phi \in (110^\circ, 180^\circ) \end{cases}, \begin{cases} F_{O,x}(0^\circ) = 215,63 \text{ N} \\ F_{O,x}(90^\circ) = 0 \\ F_{O,x}(180^\circ) = -215,63 \text{ N} \\ F_{O,x}(70^\circ \text{ } 110^\circ) = 0 \end{cases}$$

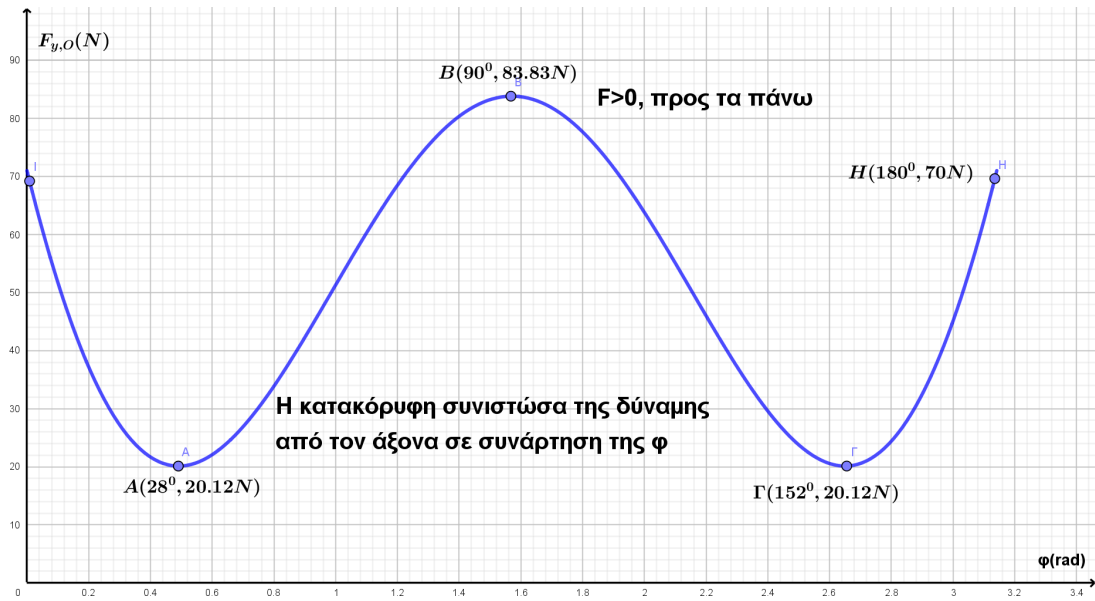
Παρατηρούμε ότι η οριζόντια συνιστώσα της αντίδρασης στο Ο καθώς η γωνία μεγαλώνει μικραίνει από μεγάλες θετικές τιμές (προς τα δεξιά), μηδενίζεται στις 70° , στη συνέχεια αντιστρέφει κατεύθυνση (προς τα αριστερά) αυξανόμενη (απολύτως) αρχικά και μετά μειούμενη (απολύτως) για να ξαναμηδενιστεί στις 90° περνώντας ξανά σε θετικές τιμές που αυξάνονται πολύ γρήγορα. Κατανοητό αφού μέχρι τις 90° η οριζόντια συνιστώσα της ακτινικής (κεντρομόλου) επιτάχυνσης είναι προς τα δεξιά, ενώ η αντίστοιχη της εφαπτομενικής (επιτροχίου) είναι προς τα αριστερά. Μειώνονται και οι δύο καθώς η γωνία αυξάνεται, αλλά με διαφορετικό τρόπο. Παρομοίως για μεγαλύτερες γωνίες. Υπάρχει μια συμμετρία της συμπεριφοράς γύρω από τον κατακόρυφο προσανατολισμό.

Σχήμα 4: Η οριζόντια συνιστώσα της αντίδρασης στο Ο σε συνάρτηση της φ

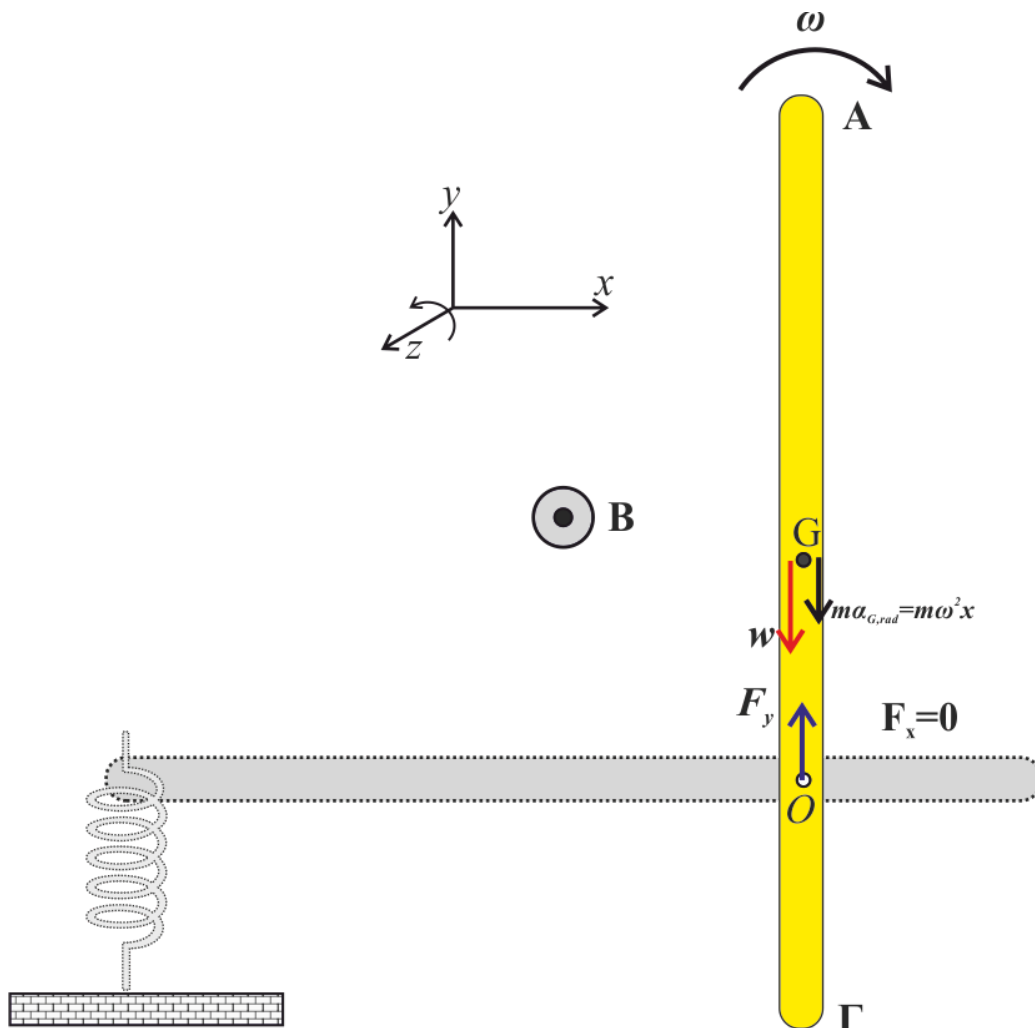
Υπολογισμός κατακόρυφης συνιστώσας αντίδρασης από τον άξονα.

$$\begin{aligned}
 (\odot N + \uparrow) \sum F_y &= m a_{G,y} \rightarrow F_{O,y} - mg = -m x (\omega^2 \sin \phi + a_y \cos \phi) \rightarrow F_{O,y} = mg - m x (\omega^2 \sin \phi + a_y \cos \phi) = \\
 &= mg - m x \left(24 \frac{E - mgx \sin \phi}{m(12x^2 + l^2)} \sin \phi + 12 \frac{gx \cos \phi}{12x^2 + l^2} \cos \phi \right) = \\
 &= mg - \frac{12x}{12x^2 + l^2} [2E \sin \phi - mgx (2 \sin^2 \phi - \cos^2 \phi)] \\
 \boxed{F_{O,y} &= mg - \frac{12x}{12x^2 + l^2} [2E \sin \phi - mgx (3 \sin^2 \phi - 1)]} \\
 F_{O,y} &= 15 \cdot 9,81 - \frac{12 \cdot 0,45}{12 \cdot 0,45^2 + 1,5^2} [2 \cdot 93,75 \sin \phi - 15 \cdot 9,81 \cdot 0,45 \cdot (3 \sin^2 \phi - 1)] = \\
 &= 147,15 - 1,15 \cdot [187,50 \sin \phi - 66,22 \cdot (3 \sin^2 \phi - 1)] = 147,15 - 215,63 \sin \phi - 76,15 + 228,46 \sin^2 \phi = \\
 &= 228,46 \sin^2 \phi - 215,63 \sin \phi + 71 \\
 \boxed{F_{O,y}(\phi) &= 228,46 \sin^2 \phi - 215,63 \sin \phi + 71} \rightarrow F_{A,y}(90^\circ) = 83,83 \text{ N}, F_{A,y}(0^\circ) = \text{N}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης στο Ο παίρνει μόνο θετικές τιμές (προς τα πάνω), συμμετρικές ως προς τον κατακόρυφο προσανατολισμό στον οποίο παρουσιάζει και τη μέγιστη τιμή της. Κατανοητό αφού οι κατακόρυφες συνιστώσες και των δύο επιταχύνσεων, ακτινικής και εφαπτομενικής, είναι προς τα κάτω.



Σχήμα 5: Η κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης στο O σε συνάρτηση της φ



Σχήμα 6: Η ράβδος με κατακόρυφο προσανατολισμό. Μηδενισμός γωνιακής επιτάχυνσης και οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης από τον άξονα

Υπολογισμός ρυθμών μεταβολής στροφορμών

Ως προς το Ο

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = I_O \vec{a}_\gamma \rightarrow \frac{dL_0}{dt} = \left(\frac{1}{12} m \ell^2 + m x^2 \right) a_\gamma = \frac{m(\ell^2 + 12x^2)}{12} 12 \frac{g x \cos \phi}{12x^2 + \ell^2} = m g x \cos \phi = 66,2 \cos \phi$$

Αλλά και

$$\frac{dL_0'}{dt} = \sum \vec{\tau}_0 \rightarrow \frac{dL_0}{dt} = \tau_{w/O} = x \cos \phi \cdot mg = 66,2 \cos \phi$$

Ιδιοστροφορμής

$$\frac{dL_G'}{dt} = I_G \vec{a}_\gamma \rightarrow \frac{dL_G}{dt} = \frac{1}{12} m \ell^2 a_\gamma = 2,81 \cdot 11,32 \cos \phi = 31,8 \cos \phi$$

Αλλά και

$$\begin{aligned} \frac{dL_G'}{dt} &= \sum \vec{\tau}_G \rightarrow \frac{dL_G}{dt} = \tau_{F/G} = x \sin \phi \cdot F_{O,x} + x \cos \phi \cdot F_{O,y} = \\ &= x \sin \phi [1,15 \cos \phi (187,50 - 198,65 \sin \phi)] + x \cos \phi (228,46 \sin^2 \phi - 215,63 \sin \phi + 71) = \\ &= \dots = 31,8 \cos \phi \end{aligned}$$

Τροχιακή ως προς Ο (σχετίζεται με την κίνηση του κέντρου μάζας)

$$\frac{d\vec{L}_{\text{τροχ./Ο}}}{dt} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} - \frac{d\vec{L}_G}{dt} \rightarrow \frac{dL_{\text{τροχ./Ο}}}{dt} = \frac{dL_0}{dt} - \frac{dL_G}{dt} = 66,2 \cos \phi - 31,8 \cos \phi = 34,4 \cos \phi$$

Αλλά και

$$\frac{d\vec{L}_{\text{τροχ./Ο}}}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \sum \vec{F} \rightarrow \frac{dL_{\text{τροχ./Ο}}}{dt} = \tau_{(\sum F)/cm} = -x \sin \phi \cdot F_{O,x} - x \cos \phi \cdot F_{O,y} + x \cos \phi \cdot mg = \dots = 34,4 \cos \phi$$

Προσδιορισμός αναπτυσσόμενης επαγωγικής ηλεκτρεγερτικής δύναμης

Καθώς η ράβδος περιστρέφεται εντός του μαγνητικού πεδίου το κάθε τμήμα της σαρώνει επιφάνεια κυκλικού τομέα με κέντρο το Ο και ακτίνες ΟΑ και ΟΒ αντιστοίχως. Αν σε χρόνο dt η ράβδος

περιστρέφεται κατά dφ τότε το εμβαδόν του διαγραφόμενου κυκλικού τομέα θα είναι $dA = \frac{\pi (AO)^2}{2\pi} d\phi$

για το ΟΑ. Η εξ επαγωγής ηλεκτρεγερτική δύναμη υπολογίζεται από τη σχέση (παράλείπουμε το μείον):

$$E_{A-O^+} = \frac{d\Phi_{AO}}{dt} = \frac{BdA}{dt} = B \frac{\pi(AO)^2 \frac{d\phi}{dt}}{2\pi} = \frac{1}{2}(AO)^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}B(AO)^2 \omega$$

$$E_{\Gamma-O^+} = \frac{d\Phi_{\Gamma O}}{dt} = \frac{BdA}{dt} = B \frac{\pi(\Gamma O)^2 \frac{d\phi}{dt}}{2\pi} = \frac{1}{2}(\Gamma O)^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}B(\Gamma O)^2 \omega$$

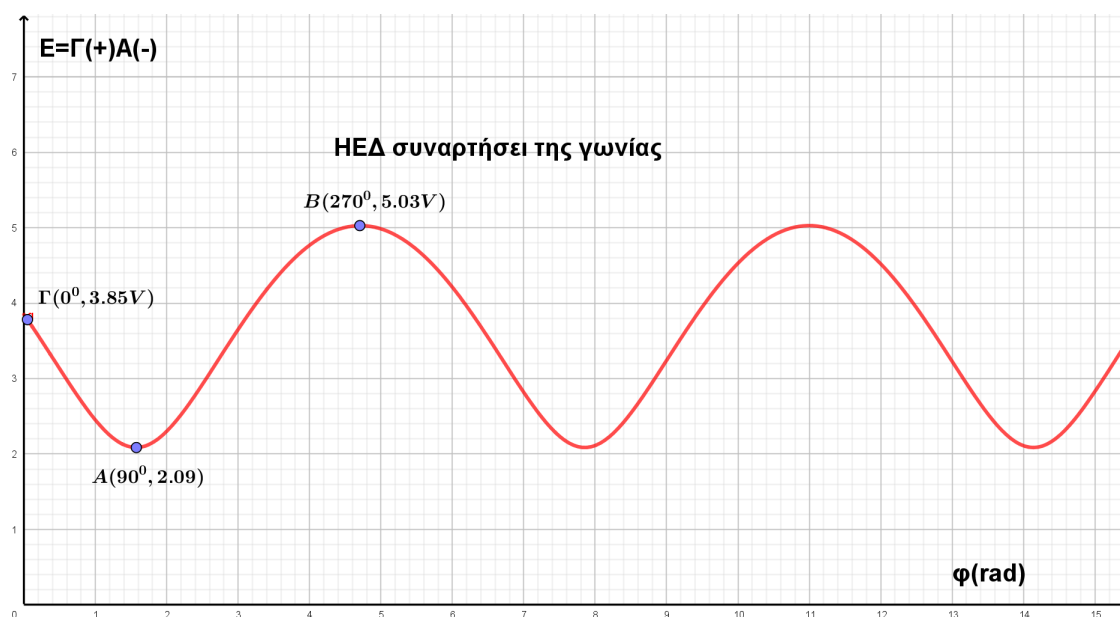
$$E_{A\Gamma,++} = E_{OA} - E_{O\Gamma} = \frac{1}{2}B[(AO)^2 - (\Gamma O)^2]\omega = \frac{1}{2}B\left[\left(\frac{\ell}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2\right]\omega = B\ell x\omega$$

$$E_{A\Gamma,++} = B\ell x\sqrt{32,05 - 22,64\sin\phi} \rightarrow \boxed{E_{A\Gamma,++} = 0,68\sqrt{32,05 - 22,64\sin\phi} \text{ V}}$$

$$E(0^\circ) = 3,85 \text{ V}, \quad E(90^\circ) = 2,09 \text{ V}, \quad E(270^\circ) = 5,03 \text{ V}$$

Για να προσδιορίσουμε την πολικότητα των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Lenz. Έτσι για την πρώτη ηλεκτρεγερτική δύναμη υποθέτουμε ότι αν αποτελούσε τμήμα κλειστού κυκλώματος θα έπρεπε να διαρρέεται από ρεύμα τέτοιας φοράς ώστε η ασκούμενη δύναμη από το μαγνητικό πεδίο να αντιστέκεται στην περιστροφή. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το ρεύμα είχε φορά από το Α προς το Ο, οπότε και η ηλεκτρεγερτική δύναμη θα πρέπει να δίνει ρεύμα στην ίδια κατεύθυνση. Έτσι και η πολικότητα (από το μείον προς το συν, φορά ρεύματος που μπορεί να δημιουργήσει) της ηλεκτρεγερτικής δύναμης πρέπει να έχει την ίδια κατεύθυνση, δηλ. το μείον να είναι προς το Α. Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για την αντίστοιχη αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη στο τμήμα ΟΓ (το ρεύμα από Γ προς το Ο). Μπορούμε με τη δύναμη Lorentz και τον κανόνα του δεξιού χεριού να βρούμε ότι τα θετικά φορτία του κινούμενου τμήματος ΟΑ της ράβδου να ωθούνται προς το Ο (+ της αντίστοιχης ηλεκτρεγερτικής δύναμης) και ομοίως του ΟΓ (λόγω αντίθετης ταχύτητας ανάμεσα στα δύο τμήματα).

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι στη ράβδο δημιουργούνται δύο πηγές ηλεκτρεγερτικής δύναμης που συνδέονται κατ' αντίθεση, δηλ. το συν της μιας που είναι προς το Ο συμπίπτει με το συν της άλλης που είναι επίσης προς το Ο. Οπότε η συνολική ηλεκτρεγερτική δύναμη θα ισούται με τη διαφορά των επιμέρους. Και επειδή το Α είναι σε πιο χαμηλό δυναμικό ως προς το κοινό σημείο Ο από ότι το Γ συνεπάγεται ότι το Γ βρίσκεται σε πιο ψηλό δυναμικό από το Α. Άρα, για τα πρόσημα της συνολικής ηλεκτρεγερτικής δύναμης το συν βρίσκεται στο Γ και το μείον στο Α και το ρεύμα αν ήταν τμήμα κυκλώματος από το Α προς το Γ.



Σχήμα 7: Η ηλεκτρεγερτική δύναμη στην ΑΓ σε συνάρτηση της γωνίας σε rad. Καθώς η γωνία μεγαλώνει προς τις 90° και η γωνιακή ταχύτητα μικραίνει, ταυτοχρόνως το ίδιο συμβαίνει και με την ΗΔ (με το + πάντοτε στο Γ και το – στο Α)