Câu 1. **[2D3-1.1-4] (Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in ¡$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mến; Fb: Nguyễn Văn Mến

Chọn B

Ta có $(f(x).f'(x))' = (f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in ¡$.

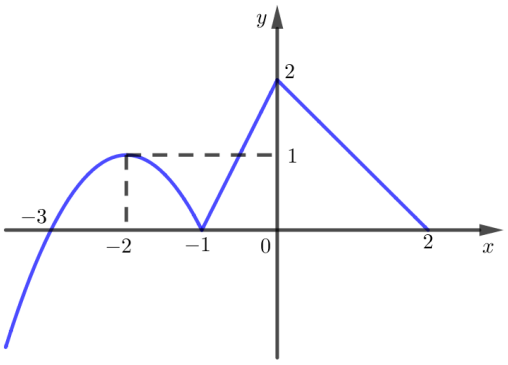
$\Rightarrow f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + C, \forall x \in ¡$.

Lại có $f(0) = f'(0) = 1$ nên $C = 1$ do đó $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1, \forall x \in ¡$.

$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x).f'(x) = 6x^5 + 12x^2 + 2, \forall x \in ¡ \Rightarrow (f(x))^2 = x^6 + 4x^3 + 2x + C_1, \forall x \in ¡$.

Mà $f(0) = 1$ nên $C_1 = 1$. Vậy $(f(1))^2 = 1^6 + 4.1^3 + 2.1 + 1 = 8$.

Câu 2. **[2D3-1.1-4] (Sở Phú Thọ)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$. **B.** $\frac{31}{6}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trường Giang; Fb: Giang Nguyen

Chọn B

Cách 1: Giải bằng phương pháp tự luận (dùng nguyên hàm)

Ta xác định biểu thức của hàm số $y = f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $[-3,2]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

Nhánh parabol $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ xác định trên $[-3,-1]$ đi qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$.

- Nhánh đường thẳng $y = a_2x + b_2$ xác định trên $[-1,0]$ đi qua 2 điểm $(-1,0)$ và $(0,2)$.

- Nhánh đường thẳng $y = a_3x + b_3$ xác định trên $[0,2]$ đi qua 2 điểm $(0,2)$ và $(2,0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{khi } -3 \le x \le -1 \\ 2x + 2 & \text{khi } -1 \le x \le 0 \\ -x + 2 & \text{khi } 0 \le x \le 2 \end{cases}.$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + C_1 & \text{khi } -3 \le x \le -1 \\ x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } -1 \le x \le 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x + C_3 & \text{khi } 0 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Vì $f(-3) = 0$ nên ta có: $-\dfrac{(-3)^3}{3} - 2(-3)^2 - 3(-3) + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$.

Do f liên tục tại $x = -1$ nên ta có: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, suy ra:

$$-\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - 3(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{7}{3}.$$

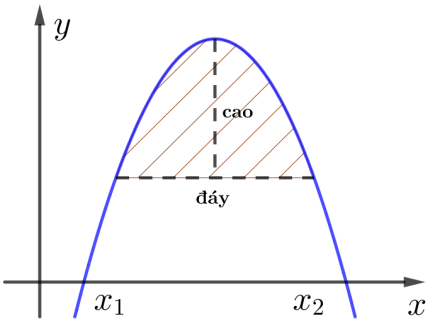
Tương tự, f liên tục tại $x = 0$ nên ta có:

$$0^2 + 2.0 + \frac{7}{3} = -\frac{0^2}{2} + 2.0 + C_3 \Leftrightarrow C_3 = \frac{7}{3}.$$

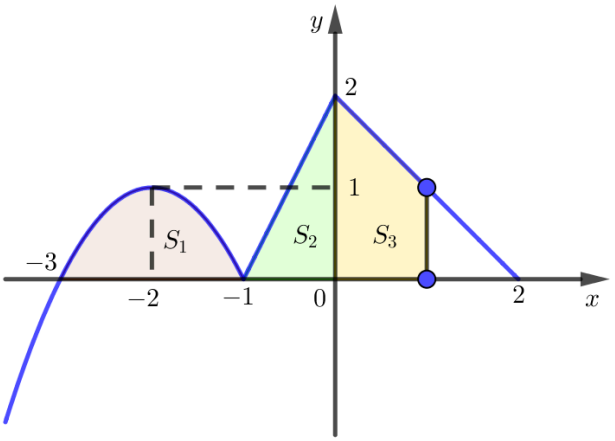
Vậy: $f(-1) + f(1) = \left[(-1)^2 + 2(-1) + \dfrac{7}{3}\right] + \left[-\dfrac{1^2}{2} + 2.1 + \dfrac{7}{3}\right] = \dfrac{31}{6}$.

Cách 2: Giải nhanh bằng phương pháp đánh giá diện tích trên đồ thị

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục Ox được cho bởi công thức: $S = \dfrac{2}{3}\text{day.cao}$ (1)



Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:



Nhánh parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$ nên ta tính ra được hệ số $a = 1$.

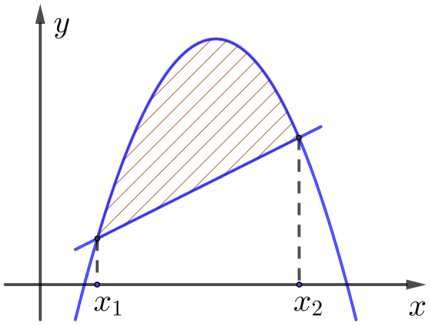
Ta có: $f(-1) + f(1) = [f(-1) - f(-3)] + [f(1) - f(-3)] = S_1 + (S_1 + S_2 + S_3)$.

Với: $S_1 = \frac{2}{3}2.1 = \frac{4}{3}$, $S_2 = \frac{1}{2}1.2 = 1$, $S_3 = \frac{1}{2}(1+2).1 = \frac{3}{2}$.

Suy ra: $f(-1) + f(1) = \frac{31}{6}$.

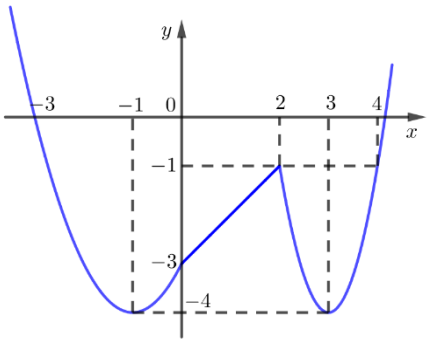
Mở rộng bài toán: Một nhược điểm của công thức (1) là chỉ có thể tính được diện tích khi "lát cắt" parabol song song với trục Ox. Trường hợp "lát cắt" bất kỳ, diện tích hình giới hạn bởi một đường thẳng và parabol $(P): ax^2 + bx + c$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (như hình minh hoạ bên dưới) ta có diện tích được cho bởi công thức:

$$S = \frac{|a||x_1 - x_2|^3}{6} \quad (2)$$



Với công thức tính nhanh diện tích "lát cắt parabol", ta có thể xây dựng bài toán tương tự với đồ thị liên tục gồm các nhánh là đường thẳng hoặc parabol. ***Tác giả đề xuất một bài toán tương tự như sau:***

: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;4]$ như hình vẽ (hai nhánh cong của đồ thị là parabol)



Biết $f(-3)=1$, giá trị của $f(0)+f(3)$ bằng

A. $\frac{77}{3}$. **B.** -23. **C.** $-\frac{65}{3}$. **D.** 27.

Câu 3. **[2D3-1.1-4] (Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$; $f'(x)=(2x+1).f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{Z})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng.

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $a-b=1$. **C.** $b-a=4035$. **D.** $a+b=-1$.

Lời giải

Tác giả: Phi Trường ; Fb: Đỗ Phi Trường

Chọn C

Ta có: $f'(x)=(2x+1).f^2(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1$ $(do\ f(x)\neq 0)$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x+C}$$

Mà $f(1)=-0,5\Rightarrow C=0$, do đó $f(x)=\frac{-1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

Nên

$$f(2017)+f(2016)+...+f(1)=\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2016}+...+\frac{1}{2}-1$$
$$=\frac{1}{2018}-1=-\frac{2017}{2018}$$

Suy ra $a=-2017;\ b=2018$ nên $b-a=4035$.

Câu 4. **[2D3-1.1-4] (KHTN Hà Nội Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x)+\frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=[f'(x)]^2$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;4]$. Biết rằng $f'(0)=f(0)=1$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** e^3. **D.** e^2+1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Duy Tân ; Fb: Nguyễn Duy Tân

Chọn A

Ta có: $f''(x)f(x)+\frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow f''(x)f(x)-[f'(x)]^2=-\frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-\int(2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+C_1.$$

Thay $x=0$ ta được: $C_1=0$.

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow \ln[f(x)]=\sqrt{2x+1}+C_2$$

Thay $x=0$ ta được $C_2=-1$.

$$\Rightarrow \ln[f(x)]=\sqrt{2x+1}-1$$

Thay $x=4$ ta được $\ln[f(4)]=2 \Rightarrow f(4)=e^2$.