

Câu 1. [2D1-1.11-3] (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1) Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} - \sqrt[3]{2x^2 + 1} + x^2(x^2 - 1) > 1 - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng $\forall x > 1$.

- A. $m > 1$. B. $m \geq \frac{1}{2}$. C. $m > \frac{1}{2}$. **D. $m \geq 1$.**

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang.

Chọn D

Xét bất phương trình $\sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} - \sqrt[3]{2x^2 + 1} + x^2(x^2 - 1) > 1 - m$ (1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} + x^4 + x^2 + m > \sqrt[3]{2x^2 + 1} + 2x^2 + 1$ (2).

Xét hàm số: $f(t) = t + t^3, t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 1 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{x^4 + x^2 + m}) > f(\sqrt[3]{2x^2 + 1})$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} > \sqrt[3]{2x^2 + 1} \Leftrightarrow m > -x^4 + x^2 + 1 \quad (*)$$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x > 1$ khi và chỉ khi bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $x > 1$.

Xét $g(x) = -x^4 + x^2 + 1$ với $x > 1$. Ta có: $g'(x) = -4x^3 + 2x = 2x(1 - 2x^2) < 0, \forall x > 1$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Do đó bất phương trình (*) nghiệm đúng $\forall x > 1$ khi và chỉ khi $m \geq g(1) \Leftrightarrow m \geq 1$. Chọn D.

Câu 2. [2D1-1.11-3] (THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{f[f(x) + 2] + 4} = f(x) + 1$ là

- A. 5. **B. 6.** C. 8. D. 9.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thủy Chi ; Fb: Nguyễn Chi

Chọn B

Đặt $t = f(x) + 2 \Rightarrow t = x^3 - 3x^2 + 3$

Khi đó phương trình trở thành

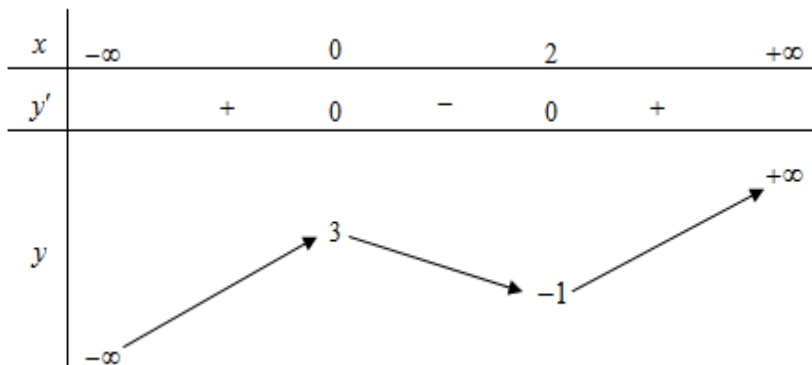
$$\sqrt{f(t)+4}=t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0 \\ f(t)+4=t^2-2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t^3-4t^2+2t+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t=2 \\ t=1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=1+\sqrt{3} \end{cases}$$

Xét hàm số $y = t = x^3 - 3x^2 + 3$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào BBT ta có phương trình $t = 2$ có 3 nghiệm phân biệt, phương trình $t = 1 + \sqrt{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình ban đầu có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 3. [2D1-1.11-3] (Đặng Thành Nam Đề 1) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(1) - e$. B. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$. C. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$. D. $m > f(1) - e$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Quý, Admin Strong Team Toán VD-VDC

Chọn C

Ta có: $f(x) < e^x + m, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow f(x) - e^x < m, \forall x \in (-1; 1) (*)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - e^x$.

Ta thấy với $\forall x \in (-1; 1)$ thì $f'(x) < 0$, $-e^x < 0$ nên $g'(x) = f'(x) - e^x < 0$, $\forall x \in (-1; 1)$.

Bảng biến thiên

x	-1	1
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có $m \geq g(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Câu 4. [2D1-1.11-3] (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	4	2	3	$-\infty$

Bất phương trình $(x^2 + 1)f(x) \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 2)$ khi và chỉ khi

A. $m < 10$.

B. $m \leq 15$.

C. $m < 27$.

D. $m < 15$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ngọc Lan; Fb: Ngoclan nguyen

Chọn D

Đặt $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$.

Ta có: $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$.

Với $x \in (-1; 0)$ thì $\begin{cases} x < 0 \\ 2 < f(x) < 4 \\ f'(x) < 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (-1; 0)$.

Tại $x = 0$, $g'(0) = 0$.

Với $x \in (0; 2)$ thì $\begin{cases} x > 0 \\ 2 < f(x) < 3 \\ f'(x) > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0; 2)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ trên khoảng $(-1; 2)$ như sau

x	-1	0	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	8		15

Dựa vào bảng biến thiên ta có bất phương trình $(x^2 + 1)f(x) \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 2)$ khi và chỉ khi $m < 15$.

Câu 5. [2D1-1.11-3] (CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$ và có bảng biến thiên như hình bên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Có bao nhiêu số tự nhiên m thỏa mãn bất phương trình $f(-f(x)) \geq m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang

Chọn C

Xét bất phương trình $f(-f(x)) \geq m$ (1).

Đặt $t = -f(x)$, với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$.

Bất phương trình (1) trở thành $f(t) \geq m$ (2).

(1) có nghiệm x thuộc đoạn $[-1; 1]$ khi và chỉ khi (2) có nghiệm t thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$		-2	2	-2	2	

Từ bảng biến thiên ta thấy (2) có nghiệm $t \in [-2; 2]$ khi và chỉ khi $m \leq 2$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 số tự nhiên m thỏa mãn đề bài.

Câu 6. [2D1-1.11-3] (Đặng Thành Nam Đề 1) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Lưu Thâm; Fb: Lưu Thâm

Chọn C

Đặt $f(x) = m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1)$.

Ta có $f(x) = (x - 1)[m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Nhận xét: Nếu $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x = 1$ là nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$ nên $f(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x = 1$.

Suy ra mệnh đề $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai.

Do đó điều kiện cần để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1).

Khi đó ta có
$$4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

+) Với $m = 1$, ta có $f(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 4) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ chọn $m = 1$.

+) Với $m = -\frac{3}{2}$, ta có $f(x) = \frac{3}{4}(x - 1)^2(3x^2 + 6x + 7) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ chọn $m = -\frac{3}{2}$.

Suy ra $S = \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$. Vậy tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\frac{1}{2}$.