Câu 1. **[2D1-1.11-3] (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. $m>1$. **B.** $m\ge\frac{1}{2}$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang.

Chọn D

Xét bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m \quad (1)$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^4+x^2+m}+x^4+x^2+m>\sqrt[3]{2x^2+1}+2x^2+1 \quad (2)$.

Xét hàm số: $f(t)=t+t^3,\ t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=1+3t^2>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x^4+x^2+m}\right)>f\left(\sqrt[3]{2x^2+1}\right)$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^4+x^2+m}>\sqrt[3]{2x^2+1}\Leftrightarrow m>-x^4+x^2+1 \ (*)$$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x>1$.

Xét $g(x)=-x^4+x^2+1$ với $x>1$. Ta có: $g'(x)=-4x^3+2x=2x\left(1-2x^2\right)<0,\forall x>1$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Do đó bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng $\forall x>1$ khi và chỉ khi $m\ge g(1)\Leftrightarrow m\ge 1$. Chọn D.

Câu 2. **[2D1-1.11-3] (THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{f\left[f(x)+2\right]+4}=f(x)+1$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thủy Chi ; Fb:Nguyễn Chi

Chọn B

Đặt $t=f(x)+2\Rightarrow t=x^3-3x^2+3$

Khi đó phương trình trở thành

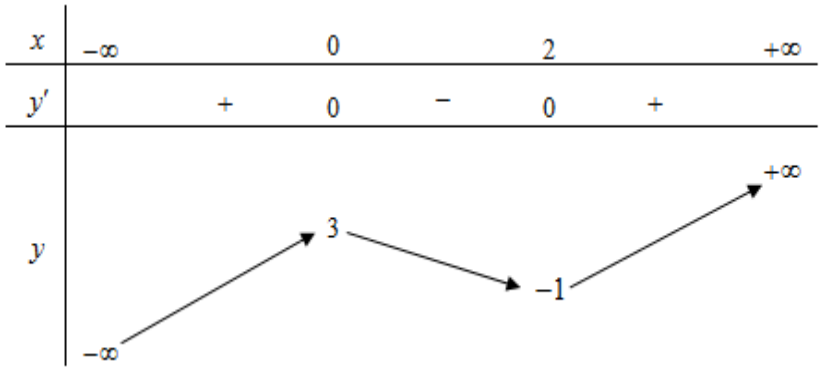
$$\sqrt{f(t)+4}=t-1\Leftrightarrow\begin{cases}t-1\ge 0\\ f(t)+4=t^2-2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\ t^3-4t^2+2t+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=t=x^3-3x^2+3$

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$$

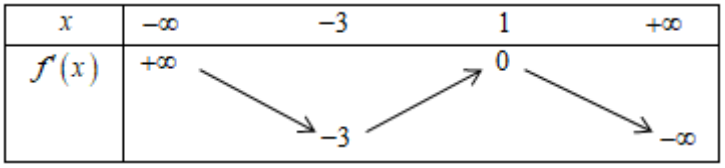
Ta có bảng biến thiên



Dựa vào BBT ta có phương trình $t=2$ có 3 nghiệm phân biệt, phương trình $t=1+\sqrt{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình ban đầu có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 3. **[2D1-1.11-3] (Đặng Thành Nam Đề 1)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(1)-\mathrm{e}$. **B.** $m>f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $m\ge f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $m>f(1)-\mathrm{e}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Quý, Admin Strong Team Toán VD-VDC

Chọn C

Ta có: $f(x)<\mathrm{e}^x+m,\ \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow f(x)-\mathrm{e}^x<m,\ \forall x\in(-1;1)$ (*).

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^x$

Ta có: $g'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x$.

Ta thấy với $\forall x \in (-1;1)$ thì $f'(x) < 0$, $-\mathrm{e}^x < 0$ nên $g'(x) = f'(x) - \mathrm{e}^x < 0$, $\forall x \in (-1;1)$.

Bảng biến thiên

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	↘	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có $m \geq g(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 4. **[2D1-1.11-3] (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Bất phương trình $\left(x^2+1\right) f(x) \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m < 10$. **B.** $m \leq 15$. **C.** $m < 27$. **D.** $m < 15$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ngọc Lan; Fb: Ngoclan nguyen

Chọn D

Đặt $g(x) = \left(x^2+1\right) f(x)$.

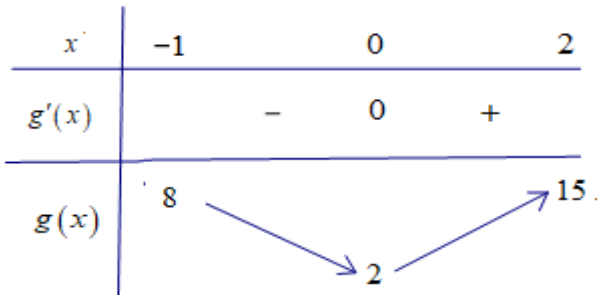
Ta có: $g'(x) = 2x f(x) + \left(x^2+1\right) f'(x)$.

Với $x \in (-1;0)$ thì $\begin{cases} x < 0 \\ 2 < f(x) < 4 \\ f'(x) < 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (-1;0)$.

Tại $x = 0$, $g'(0) = 0$.

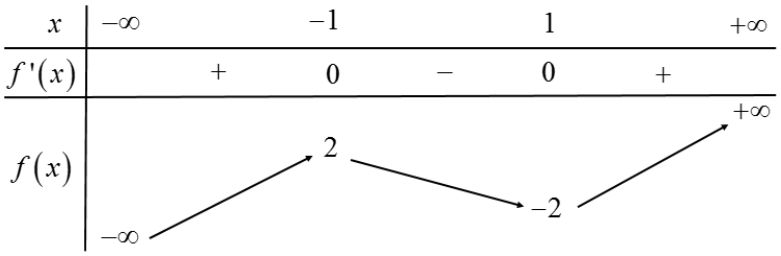
Với $x \in (0;2)$ thì $\begin{cases} x > 0 \\ 2 < f(x) < 3 \\ f'(x) > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0;2)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=(x^2+1)f(x)$ trên khoảng $(-1;2)$ như sau



Dựa vào bảng biến thiên ta có bất phương trình $(x^2+1)f(x)\ge m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;2)$ khi và chỉ khi $m<15$.

Câu 5. **[2D1-1.11-3] (CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(-2)=-2$, $f(2)=2$ và có bảng biến thiên như hình bên



Có bao nhiêu số tự nhiên m thỏa mãn bất phương trình $f(-f(x))\ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;1]$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang

Chọn C

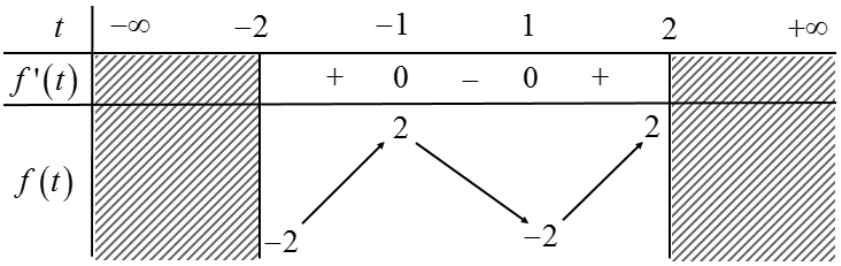
Xét bất phương trình $f(-f(x))\ge m$ (1).

Đặt $t=-f(x)$, với $x\in[-1;1]$ thì $t\in[-2;2]$.

Bất phương trình (1) trở thành $f(t)\ge m$ (2).

(1) có nghiệm x thuộc đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi (2) có nghiệm t thuộc đoạn $[-2;2]$.

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy (2) có nghiệm $t\in[-2;2]$ khi và chỉ khi $m\le 2$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy có 3 số tự nhiên m thỏa mãn đề bài.

Câu 6. **[2D1-1.11-3] (Đặng Thành Nam Đề 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6\left(x-1\right)\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Lưu Thêm; Fb: Lưu Thêm

Chọn C

Đặt $f\left(x\right)=m^2\left(x^4-1\right)+m\left(x^2-1\right)-6\left(x-1\right)$.

Ta có $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6\right]$.

$$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ m^2\left(x^3+x^2+x+1\right)+m\left(x+1\right)-6=0,\ (1)\end{array}\right.$$

Nhận xét: Nếu $x=1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x=1$ là nghiệm đơn của phương trình $f\left(x\right)=0$ nên $f\left(x\right)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x=1$.

Suy ra mệnh đề $f\left(x\right)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ là mệnh đề sai.

Do đó điều kiện cần để $f\left(x\right)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ là $x=1$ là nghiệm của phương trình (1).

Khi đó ta có $$4m^2+2m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$.

+) Với $m=1$, ta có $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+4\right)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ chọn $m=1$.

+) Với $m=-\dfrac{3}{2}$, ta có $f\left(x\right)=\dfrac{3}{4}\left(x-1\right)^2\left(3x^2+6x+7\right)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ chọn $m=-\dfrac{3}{2}$.

Suy ra $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. Vậy tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{1}{2}$.