Câu 1. **[2D1-1.11-3] (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. $m>1$. **B.** $m\ge\frac{1}{2}$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang.

Chọn D

Xét bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m \quad (1)$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4+x^2+m}+x^4+x^2+m>\sqrt[3]{2x^2+1}+2x^2+1 \quad (2)$.

Xét hàm số: $f(t)=t+t^3,\ t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=1+3t^2>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x^4+x^2+m}\right)>f\left(\sqrt[3]{2x^2+1}\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4+x^2+m}>\sqrt[3]{2x^2+1}\Leftrightarrow m>-x^4+x^2+1 \ (*)$$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x>1$.

Xét $g(x)=-x^4+x^2+1$ với $x>1$. Ta có: $g'(x)=-4x^3+2x=2x\left(1-2x^2\right)<0,\forall x>1$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Do đó bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng $\forall x>1$ khi và chỉ khi $m\ge g(1)\Leftrightarrow m\ge 1$. Chọn D.

Câu 2. **[2D1-1.11-3] (THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{f\left[f(x)+2\right]+4}=f(x)+1$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thủy Chi ; Fb:Nguyễn Chi

Chọn B

Đặt $t=f(x)+2\Rightarrow t=x^3-3x^2+3$

Khi đó phương trình trở thành

$$\sqrt{f(t)+4}=t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1\ge 0 \\ f(t)+4=t^2-2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1 \\ t^3-4t^2+2t+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=t=x^3-3x^2+3$

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta có phương trình $t=2$ có 3 nghiệm phân biệt, phương trình $t=1+\sqrt{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vây phương trình ban đầu có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 3. **[2D1-1.11-3] (Đặng Thành Nam Đề 1)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<e^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(1)-e$. **B.** $m>f(-1)-\frac{1}{e}$. **C.** $m\ge f(-1)-\frac{1}{e}$. **D.** $m>f(1)-e$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Quý, Admin Strong Team Toán VD-VDC

Chọn C

Ta có: $f(x)<e^x+m$, $\forall x\in(-1;1)$ $\Leftrightarrow f(x)-e^x<m$, $\forall x\in(-1;1)$ (*).

Xét hàm số $g(x)=f(x)-e^x$

Ta có: $g'(x)=f'(x)-e^x$.

Ta thấy với $\forall x \in (-1;1)$ thì $f'(x) < 0$, $-e^x < 0$ nên $g'(x) = f'(x) - e^x < 0$, $\forall x \in (-1;1)$.

Bảng biến thiên

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có $m \ge g(-1) \Leftrightarrow m \ge f(-1) - \frac{1}{e}$.

Câu 4. **[2D1-1.11-3] (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $(x^2+1)f(x) \ge m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m < 10$. **B.** $m \le 15$. **C.** $m < 27$. **D.** $m < 15$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ngọc Lan; Fb: Ngoclan nguyen

Chọn D

Đặt $g(x) = (x^2+1)f(x)$.

Ta có: $g'(x) = 2xf(x) + (x^2+1)f'(x)$.

Với $x \in (-1;0)$ thì $\begin{cases} x < 0 \\ 2 < f(x) < 4 \\ f'(x) < 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (-1;0)$.

Tại $x = 0$, $g'(0) = 0$.

Với $x \in (0;2)$ thì $\begin{cases} x > 0 \\ 2 < f(x) < 3 \\ f'(x) > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0;2)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=(x^2+1)f(x)$ trên khoảng $(-1;2)$ như sau

x	-1		0		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	8	$\searrow$	2	$\nearrow$	15

Dựa vào bảng biến thiên ta có bất phương trình $(x^2+1)f(x)\ge m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;2)$ khi và chỉ khi $m<15$.

Câu 5. **[2D1-1.11-3] (CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(-2)=-2$, $f(2)=2$ và có bảng biến thiên như hình bên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số tự nhiên m thỏa mãn bất phương trình $f(-f(x))\ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;1]$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang

Chọn C

Xét bất phương trình $f(-f(x))\ge m$ (1).

Đặt $t=-f(x)$, với $x\in[-1;1]$ thì $t\in[-2;2]$.

Bất phương trình (1) trở thành $f(t)\ge m$ (2).

(1) có nghiệm x thuộc đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi (2) có nghiệm t thuộc đoạn $[-2;2]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
$f'(t)$			$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(t)$		-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	

Từ bảng biến thiên ta thấy (2) có nghiệm $t\in[-2;2]$ khi và chỉ khi $m\le 2$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy có 3 số tự nhiên m thỏa mãn đề bài.

Câu 6. **[2D1-1.11-3] (Đặng Thành Nam Đề 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4-1)+m(x^2-1)-6(x-1)\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Lưu Thêm; Fb: Lưu Thêm

Chọn C

Đặt $f(x)=m^2(x^4-1)+m(x^2-1)-6(x-1)$.

Ta có $f(x)=(x-1)\left[m^2(x^3+x^2+x+1)+m(x+1)-6\right]$.

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ m^2(x^3+x^2+x+1)+m(x+1)-6=0,\ (1)\end{array}\right..$$

Nhận xét: Nếu $x=1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x=1$ là nghiệm đơn của phương trình $f(x)=0$ nên $f(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x=1$.

Suy ra mệnh đề $f(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ là mệnh đề sai.

Do đó điều kiện cần để $f(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ là $x=1$ là nghiệm của phương trình (1).

Khi đó ta có $4m^2+2m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

+) Với $m=1$, ta có $f(x)=(x-1)^2(x^2+2x+4)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ chọn $m=1$.

+) Với $m=-\frac{3}{2}$, ta có $f(x)=\frac{3}{4}(x-1)^2(3x^2+6x+7)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ chọn $m=-\frac{3}{2}$.

Suy ra $S=\left\{1;-\frac{3}{2}\right\}$. Vậy tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\frac{1}{2}$.