Câu 1. **[2D3-2.2-4] (Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+\sin x\cos x+1}{\cos^4 x+\sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+\sin x\cos x+1}{\cos^4 x+\sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^4 x}}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(1+\tan^2 x\right)+\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\tan^2 x\right)^2}{1+\tan x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan x+\left(1+\tan^2 x\right)}{1+\tan x}\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\right)\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=1+\tan x$ ta được $\mathrm{d}t=\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$, đổi cận $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=2,\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=1+\sqrt{3}$

Ta được

$$\int\limits_{2}^{1+\sqrt{3}}\left(1+\frac{1+(t-1)^2}{t}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_{2}^{1+\sqrt{3}}\left(t-1+\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{t^2}{2}-t+2\ln t\right)\right|_2^{1+\sqrt{3}} = 1-2\ln 2+2\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Từ đây ta suy ra $a+b\ln 2+c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)=1-2\ln 2+2\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Do đó $a=1,b=-2,c=2$ suy ra $abc=-4$.