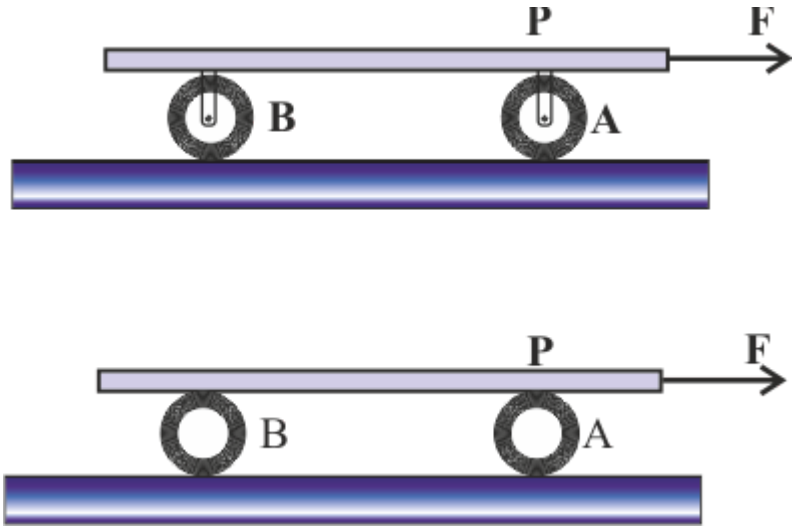
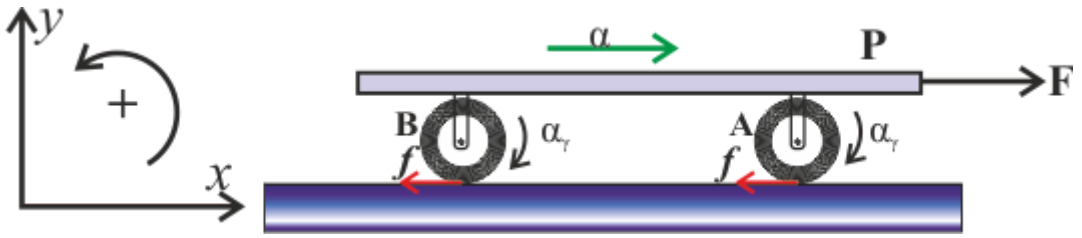
Εκφώνηση: Η οριζόντια ράβδος έχει μάζα $M = 12\ kg$ και υποστηρίζεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, από δύο όμοιους ομογενείς δίσκους, καθένας από τους οποίους έχει μάζα $m = 8\ kg$, ακτίνα $R = 8\ cm$ και ροπή αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ ως προς το κέντρο του. Στην πρώτη περίπτωση η ράβδος συνδέεται σταθερά μέσω στηριγμάτων αμελητέας μάζας στους άξονες των δύο δίσκων και στη δεύτερη ακουμπά απευθείας στους δίσκους. Αν γνωρίζουμε ότι οι δίσκοι κυλούν, χωρίς να ολισθαίνουν, είτε ως προς το έδαφος είτε ως προς τη ράβδο στη 2η περίπτωση, βρείτε την επιτάχυνση της ράβδου, όταν της εφαρμόσουμε οριζόντια δύναμη $F = 72\ N$.



Απάντηση

Κρίσιμα δεδομένα. Οι όμοιοι δίσκοι κινούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (επιτάχυνση του κέντρου μάζας και γωνιακή επιτάχυνση). Τα σημεία στήριξης της ράβδου στα κέντρα των τροχών στην πρώτη περίπτωση και η μη ολίσθηση των σημείων επαφής των τροχών με τη ράβδο στη δεύτερη περίπτωση δίνουν δεσμευτικές σχέσεις ανάμεσα στα κινηματικά μεγέθη των δίσκων – ράβδου.



Σχήμα 2: Πρώτη περίπτωση. Δεν έχουν σχεδιαστεί οι εσωτερικές δυνάμεις και οι κατακόρυφες (κάθετες – βάρη) εξωτερικές

Στην **πρώτη** περίπτωση της σύνδεσης μέσω στηριγμάτων η ράβδος (κέντρο μάζας) και τα κέντρα μάζας των δύο δίσκων εκτελούν την ίδια οριζόντια κίνηση. Άρα, το ίδιο συμβαίνει και με το κέντρο μάζας του όλου συστήματος, όπου και αν βρίσκεται.

$$\vec{a}_{\text{ράβδος}} = \vec{a}_{\text{cm,δίσκου}} = \vec{a}_{cm,\text{συστ.}} \equiv \vec{a}$$

Κατακόρυφα, λόγω ισορροπίας, κανένα κέντρο μάζας δεν επιταχύνεται (όλα κινούνται σε ευθεία οριζόντια γραμμή). Έτσι την κίνηση της ράβδου και τη μεταφορική κίνηση των δύο τροχών μπορούμε να τις αντιμετωπίσουμε ως ενιαίο σώμα αγνοώντας τις εσωτερικές δυνάμεις.

Οι τριβές από το έδαφος, που είναι κατ' ανάγκην προς τα αριστερά για να μπορούν να προκαλούν δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση, είναι ίσες μεταξύ τους, αφού προκαλούν το ίδιο γωνιακό αποτέλεσμα στους δύο όμοιους δίσκους. Επίσης ίσες πρέπει να είναι και οι οριζόντιες προς τα δεξιά συνιστώσες των δυνάμεων από τα στηρίγματα, αφού μαζί με τις ίσες τριβές προκαλούν την ίδια επιτάχυνση στα κέντρα μάζας των δίσκων. Γράφουμε:

$$\text{σύστημα} \rightarrow \begin{cases} (+\rightarrow)\sum_i F_{i,x} = m_{ολ}a \rightarrow F - 2f = (2m+M)a \\ (+\uparrow)\sum_i F_{i,y} = 0 \rightarrow N_A + N_B - (M+2m)g = 0 \end{cases}$$

Όπου α η κοινή επιτάχυνση της ράβδου και των κέντρων μαζών των δύο δίσκων.

Για τη στροφική κίνηση των δίσκων γύρω από το κέντρο μάζας τους γράφουμε (οι δυνάμεις από τα στηρίγματα, οι κάθετες από το έδαφος και τα βάρη τους δεν παράγουν ροπές ως το κέντρο μάζας τους):

$$\text{δίσκος} \rightarrow \left.\begin{cases} (+\odot)\sum_i \vec{\tau}_{cm} = I_{cm}\vec{a}_\gamma \rightarrow fR = \tfrac{1}{2}mR^2 a_\gamma \ (\text{μέτρα}) \\ \text{κύλιση} \rightarrow a_{\text{ράβδος}} = a_{\text{cm,δίσκου}} = a_{\text{tan,δίσκου}} = Ra_\gamma \equiv a \ \ (a_\gamma \otimes) \end{cases}\right\} \rightarrow f = \tfrac{1}{2}ma$$

Οι προηγούμενες σχέσεις συνδυαζόμενες δίνουν:

$$\left.\begin{cases} F - 2f = (2m+M)a \\ f = \tfrac{1}{2}ma \end{cases}\right\} \rightarrow F - ma = (2m+M)a \rightarrow \boxed{a = \frac{F}{3m+M}} = \frac{72}{36} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

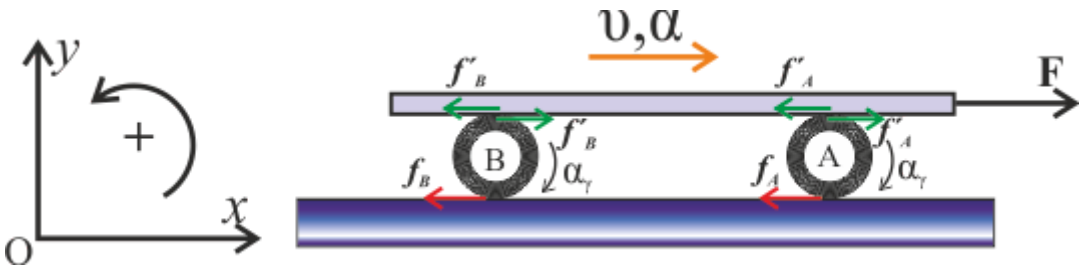
$$f = \tfrac{1}{2}m\frac{F}{3m+M} \rightarrow \boxed{f = \frac{m}{2(3m+M)}F} = \frac{8}{72}72 = 8\ N$$

Επιβεβαιώνουμε ότι η μεταβιβαζόμενη στο σύστημα, μέσω του έργου της F, ενέργεια σε χρονικό διάστημα t ισούται με την αποκτηθείσα κινητική ενέργεια του όλου συστήματος στην ίδια χρονική διάρκεια.

$$W_F = Fx = F\tfrac{1}{2}at^2,\ \upsilon_{cm,\text{δίσκου}} = \upsilon_{\text{ραβδου}} \equiv \upsilon$$

$$K_{\text{συστ.}} = 2K_{\text{δίσκου}} + K_{\text{ράβδου}} = 2\left(\tfrac{1}{2}m\upsilon^2_{cm,\text{δίσκου}} + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2\right) + \tfrac{1}{2}M\upsilon^2_{\text{ραβδου}} = \left(m\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}mR^2\frac{\upsilon^2}{R^2}\right) + \tfrac{1}{2}M\upsilon^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(3m+M)\upsilon^2 = \tfrac{1}{2}(3m+M)a^2t^2 = \left(\tfrac{1}{2}at^2\right)(3m+M)a = \tfrac{1}{2}at^2F \ \ (\quad)$$



Εικόνα 1: Δεύτερη περίπτωση. Δεν έχουν σχεδιαστεί οι κατακόρυφες εξωτερικές δυνάμεις. Με τόνο στο f οι τριβές ανάμεσα στους δίσκους και στη ράβδο και χωρίς ανάμεσα στους δίσκους και στο δάπεδο.

Στη **δεύτερη** περίπτωση. Οι δύο όμοιοι δίσκοι κινούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, οπότε όλα τα κινηματικά τους μεγέθη θα είναι ίσα (μετατόπιση, γωνιακή ταχύτητα, ...). Εφόσον η ράβδος δεν ολισθαίνει στους δίσκους τα σημεία επαφής του με τους δίσκους θα έχουν διαρκώς την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση (εφαπτομενική συνιστώσα για τους δίσκους). Τα ανώτερα σημεία των δίσκων που ακουμπά η ράβδος έχουν διπλάσια ταχύτητα και επιτάχυνση από αυτή του κέντρου της και το ίδιο θα συμβαίνει και με την ταχύτητα – επιτάχυνση της ράβδου.

Διαφορετικά. Για μια περιστροφή του δίσκου κατά dθ και μήκους τόξου ds=Rdθ το κέντρο του δίσκου μετατοπίζεται οριζόντια το ίδιο, αλλά το σημείο της ράβδου που ήταν αρχικά σε επαφή με το δίσκο μετατοπίζεται οριζόντια κατά ds περισσότερο του κέντρου μάζας του δίσκου, άρα η μετατόπιση της ράβδου θα είναι διπλάσια της μετατόπισης του κέντρου μάζας του δίσκου. Έτσι γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} dx_{\text{ράβδου}} = 2ds = 2dx_{cm,\text{δίσκου}} = 2Rd\theta \\ \upsilon_{\text{ράβδου}} = 2\upsilon_{\varepsilon\kappa\,\text{περιστροφής,δίσκου}} = 2R\omega = 2\upsilon_{cm,\text{δίσκου}} \equiv \upsilon \to \upsilon_{cm,\text{δίσκου}} = \frac{1}{2}\upsilon \\ a_{\text{ράβδου}} = 2a_{tan,\text{δίσκου}} = 2Ra_{\gamma} = 2a_{cm,\text{δίσκου}} \equiv a \to a_{cm,\text{δίσκου}} = \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

Όπου υ και α η ταχύτητα και η επιτάχυνση αντιστοίχως της ράβδου.

Για τη μεταφορική της ράβδου και του κέντρου μάζας του κάθε δίσκου και τη στροφική των δίσκων γράφουμε:

$$\text{ράβδος}(+\to)\sum_i F_x = Ma_{\text{ράβδος}} \to F - f_A' - f_B' = Ma_{\text{ράβδος}} = Ma\,(1)$$

$$\text{μεταφορική δίσκου A}(+\to)\sum_i F_x = ma_{\text{G,A}} \to f_A' - f_A = ma_{\text{cm,A}} = \tfrac{1}{2}ma\,(2)$$

$$\text{μεταφορική δίσκου B}(+\to)\sum_i F_x = ma_{\text{G,B}} \to f_B' - f_B = ma_{\text{cm,B}} = \tfrac{1}{2}ma\,(3)$$

στροφική περί το cm δίσκου A $(+\odot)\sum_i \tau_{cm,A} = I_{cm}a_\gamma \rightarrow (f_A' + f_A)R = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{2R} \rightarrow$

$f_A' + f_A = \frac{1}{4}ma\,(4)$

στροφική περί το cm δίσκου B $(+\odot)\sum_i \tau_{cm,B} = I_{cm}a_\gamma \rightarrow (f_B' + f_B)R = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{2R} \rightarrow$

$f_B' + f_B = \frac{1}{4}ma\,(5)$

$$(2+4) \rightarrow 2f_A' = \tfrac{3}{4}ma \rightarrow f_A' = \tfrac{3}{8}ma\,(6),\ \ (3+5) \rightarrow 2f_B' = \tfrac{3}{4}ma \rightarrow f_B' = \tfrac{3}{8}ma\,(7)$$

$$(1,6,7)\ F - f_A' - \tfrac{3}{8}ma - \tfrac{3}{8}ma = Ma \rightarrow F = \left(\tfrac{3}{4}m + M\right)a \rightarrow \boxed{a = \frac{F}{0,75m + M}} = 4\ m/s^2$$

$$(2,6)\ f_A = f_A' - \tfrac{1}{2}ma = \tfrac{3}{8}ma - \tfrac{1}{2}ma = -\tfrac{1}{8}ma = -4\ N,\ f_A' = \tfrac{3}{8}ma = 12\ N$$

$$(3,7)\ f_B = f_B' - \tfrac{1}{2}ma = \tfrac{3}{8}ma - \tfrac{1}{2}ma = -\tfrac{1}{8}ma = -4\ N,\ f_B' = \tfrac{3}{8}ma = 12\ N$$

$$a_{cm,A} = a_{cm,B} = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2\ m/s^2,\ a_{\gamma,A} = a_{\gamma,B} = Ra_{cm} = R\frac{a}{2} = 0,08\cdot 2 = 0,16\ rad/s^2$$

Οι τριβές από το έδαφος στους δίσκους έχουν αντίθετη κατεύθυνση από τη σχεδιασμένη (εκ του αποτελέσματος).

Σημείωση: Λαμβάνοντας υπόψη ότι το άθροισμα και η διαφορά των δύο δυνάμεων (τριβών από τη ράβδο και το έδαφος) των ασκούμενων στους δίσκους, πρέπει να είναι ίσα (-ες) για τους δύο δίσκους, αφού προκαλούν το ίδιο μεταφορικό και περιστροφικό αποτέλεσμα. Έτσι και οι αντίστοιχες δυνάμεις, τριβές, πρέπει να είναι ίσες (μια λύση για το ίδιο σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους για τους δύο δίσκους). Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε στους προηγούμενους υπολογισμούς να αναφερόμαστε σε έναν μόνο δίσκο.

Επιβεβαιώνουμε ότι η μεταβιβαζόμενη στο σύστημα, μέσω του έργου της F, ενέργεια σε χρονικό διάστημα t ισούται με την αποκτηθείσα κινητική ενέργεια του όλου συστήματος στην ίδια χρονική διάρκεια.

$$W_F = Fx = F\tfrac{1}{2}at^2,\ \ \upsilon_{cm,\text{δίσκου}} = \tfrac{1}{2}\upsilon_{\text{ραβδου}} \equiv \tfrac{1}{2}\upsilon$$

$$K_{\text{συστ.}} = 2K_{\text{δίσκου}} + K_{\text{ράβδου}} = 2\left(\tfrac{1}{2}m\upsilon_{cm,\text{δίσκου}}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2\right) + \tfrac{1}{2}M\upsilon_{\text{ραβδου}}^2 = \left[m\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}mR^2\left(\frac{\upsilon}{2R}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2}M\upsilon^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{4}m + M\right)\upsilon^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{4}m + M\right)a^2t^2 = \left(\tfrac{1}{2}at^2\right)\left(\frac{3}{4}m + M\right)a = \tfrac{1}{2}at^2F\ \ (\text{οεδ})$$

Σημείωση: Ανεξαρτήτως συσχετισμού μαζών η επιτάχυνση της πρώτης διάταξης είναι μικρότερη της δεύτερης (υπό την ίδια δύναμη). Η πρώτη κινείται ως πακέτο με το κέντρο μάζας όλων (και του συνόλου) να συμβαδίζουν, ενώ στη δεύτερη δεν υπάρχει «συνοχή» και το κέντρο μάζας των δίσκων μένει πίσω από το κέντρο μάζας της ράβδου (το ίδιο και το κέντρο μάζας του συνόλου).

ΥΓ: Η άσκηση μπορούσε να λυθεί και με την αρχή διατήρησης της ενέργειας (ΘΜΚΕ) αφού οι στατικές τριβές ανάμεσα στους τροχούς και στο έδαφος δεν παράγουν συνολικό έργο. Έτσι έχουμε και για τις δύο περιπτώσεις (βλέπε και προηγούμενες σχέσεις:

$$W_F = Fx = F\tfrac{1}{2}at^2 = \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(3m+M)\upsilon^2 = \tfrac{1}{2}(3m+M)a^2t^2 \\ \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}m+M\right)\upsilon^2 = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}m+M\right)a^2t^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{F}{3m+M} \\ a = \dfrac{F}{0,75m+M} \end{array} \right\}$$