

Docente	Wilton Robeiro Arenas.		
Grado	Décimo	Asignatura	Matemáticas
Fecha	Del 4 al 29 de mayo.		
Estándares	Describo y modelo, fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.		

RÚBRICAS DE EVALUACIÓN

CRITERIOS	DESEMPEÑOS			OBSERVACIONES
	Nivel A	Nivel B	Nivel C	
Describe las fórmulas de las razones trigonométricas a través de estrategias nemotécnicas comprendiendo la relación establecida entre los diferentes lados del triángulo rectángulo.				
Justifica los procedimientos realizados para encontrar los lados faltantes en un triángulo rectángulo a partir de las razones trigonométricas.				
Justifica los procedimientos realizados para encontrar los ángulos faltantes en un triángulo rectángulo a partir de las razones trigonométricas.				
Propone estrategias de solución de problemas con base en las razones trigonométricas.				

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

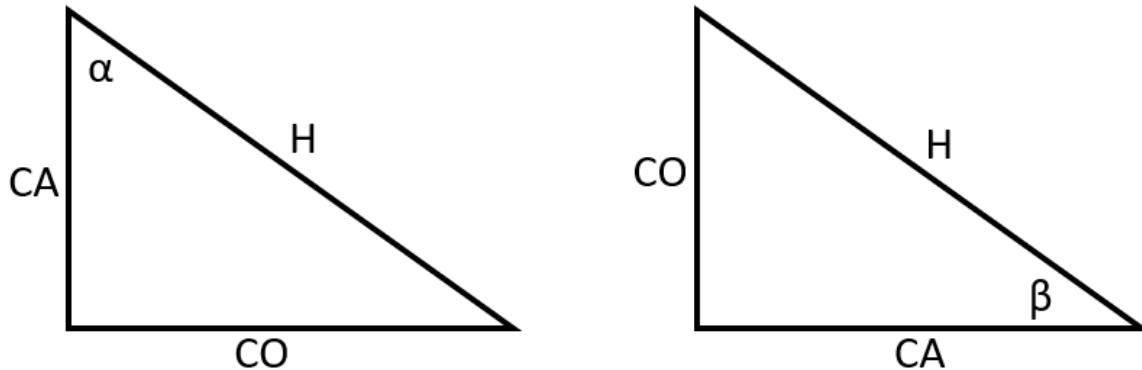
Las razones trigonométricas, hacen referencia a las relaciones que se establecen entre los diferentes lados del triángulo rectángulo. A diferencia del teorema de Pitágoras, aquí los catetos reciben una segunda clasificación, de acuerdo a la posición que tengan con relación al ángulo de referencia.

Cateto opuesto (CO): Es el lado opuesto al ángulo de referencia.

Cateto adyacente (CA): Es el lado que se encuentra junto al ángulo de referencia.

Hipotenusa (H): Siempre será el lado más largo del triángulo rectángulo.

Para comprender mejor como nombrar los lados del triángulo rectángulo, observa la siguiente imagen:



En ella podemos ver dos triángulos exactamente iguales, en los cuales se han nombrado cada uno de sus lados. En el primer triángulo, se tomo como ángulo de referencia a α , mientras que en el segundo triángulo se tomo como referencia el ángulo β . Es importante señalar que, al cambiar el ángulo de referencia, la posición del cateto opuesto y el cateto adyacente cambian.

Sabiendo reconocer como se nombran cada uno de los lados del triángulo rectángulo, se puede proceder a establecer las razones trigonométricas: seno (sin), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc), las cuales se presentan a continuación, siendo x el ángulo de referencia.

$$\sin x = \frac{CO}{H}$$

$$\sec x = \frac{H}{CA}$$

$$\cos x = \frac{CA}{H}$$

$$\csc x = \frac{H}{CO}$$

$$\tan x = \frac{CO}{CA}$$

$$\cot x = \frac{CA}{CO}$$

Estas razones trigonométricas, permiten encontrar, tanto el valor de los lados faltantes como de los ángulos dentro de un triángulo rectángulo, siempre y cuando se cuente con al menos dos datos. Para llevar a cabo este proceso, se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Nombrar los lados del triángulo rectángulo con relación al ángulo de referencia.

Paso 2: Identificar la fórmula que me permita encontrar el lado o el ángulo que deseo encontrar.

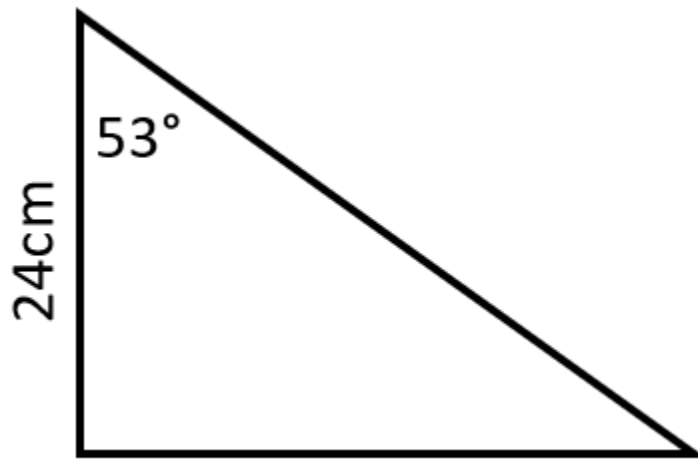
Paso 3: Sustituir los datos en la formula.

Paso 4: Despejar y solucionar la ecuación.

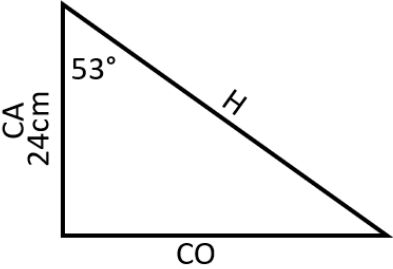
A continuación, se presentarán algunos ejemplos de como llevar a cabo este proceso. Ten en cuenta que, para esto necesitarás una calculadora científica, en la cual podrás encontrar las funciones seno, coseno y tangente, asegúrate que la calculadora esté configurada en grados. Como forma de práctica, confirma en la calculadora los resultados que se presentan en estos ejemplos.

PROCESO PARA ENCONTRAR LOS LADOS FALTANTES

Encuentra los lados faltantes en el siguiente triángulo rectángulo.



Para llevar a cabo este proceso, se debe garantizar que en la figura por lo menos se muestre un ángulo y un lado.

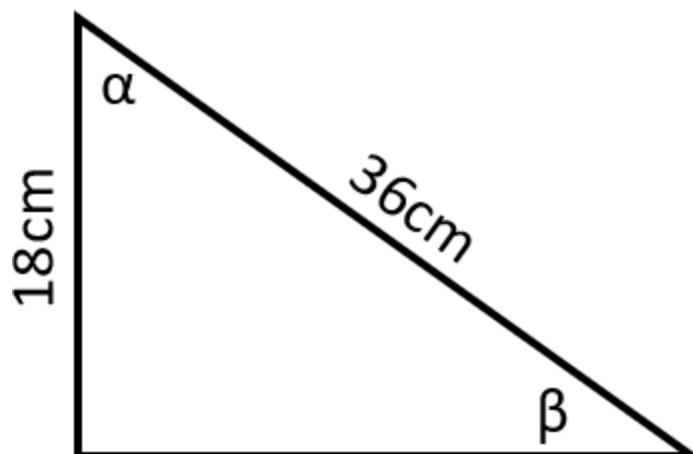
	Paso 1: Se nombran los lados del triángulo rectángulo con relación al ángulo de 53° .
$\tan \tan x = \frac{CO}{CA}$	Paso 2: Empezaremos encontrando el cateto opuesto. Como en la imagen nos dan el cateto adyacente, escogemos la fórmula que contenga estos dos lados.
$\begin{aligned}\tan \tan 53^\circ &= \frac{CO}{24cm} \\ 24cm \cdot \tan \tan 53^\circ &= CO \\ CO &= 31,84cm\end{aligned}$	Paso 3: Sustituimos la información. Paso 4: Despejamos la ecuación y solucionamos. El 24 que está dividiendo pasa a multiplicar, luego solucionamos en la calculadora.

Se repiten los pasos 2, 3 y 4 para encontrar la hipotenusa.

$\cos \cos x = \frac{CA}{H}$	Paso 2: Como se va a encontrar la hipotenusa y nos dan el cateto adyacente, escogemos la fórmula que contenga estos dos lados.
$\begin{aligned}\cos \cos 53^\circ &= \frac{24cm}{H} \\ H \cdot \cos \cos 53^\circ &= 24cm \\ H &= \frac{24cm}{\cos \cos 53^\circ} \\ H &= 39,88cm\end{aligned}$	Paso 3: Sustituimos la información. Paso 4: Despejamos la ecuación y solucionamos. La hipotenusa sube a multiplicar y $\cos 53^\circ$ baja a dividir.

PROCESO PARA ENCONTRAR LOS ÁNGULOS FALTANTES

Encuentra los ángulos faltantes en el siguiente triángulo rectángulo.



Para llevar a cabo este proceso, se debe garantizar que al menos se tenga el valor de dos de sus lados.

A right-angled triangle with vertices at the top-left, bottom-left, and bottom-right. The vertical side is labeled CO and 18cm. The hypotenuse is labeled H and 36cm. The angle at the top-left vertex is alpha (α), and the angle at the bottom-right vertex is beta (β). The right angle is at the bottom-left vertex. The horizontal side is labeled CA.	Paso 1: Empezaremos encontrando el valor del ángulo β, por ello, nombraremos los lados del triángulo con relación a este ángulo.
$\sin x = \frac{CO}{H}$	Paso 2: Dado que la figura nos da el cateto opuesto y la hipotenusa, se debe escoger la fórmula que contenga estos dos lados.
$\sin \beta = \frac{18cm}{36cm}$ $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{18}{36}\right)$ $\beta = 30^\circ$	Paso 3: Sustituimos los datos dentro de la fórmula. Paso 4: Despejamos la fórmula y resolvemos en la calculadora.

Para encontrar el valor de α, solo se debe aplicar la propiedad que indica que la suma de los ángulos internos de un triángulo, siempre suman 180°.

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \alpha = 60^\circ$$

NOTA ACLARATORIA:

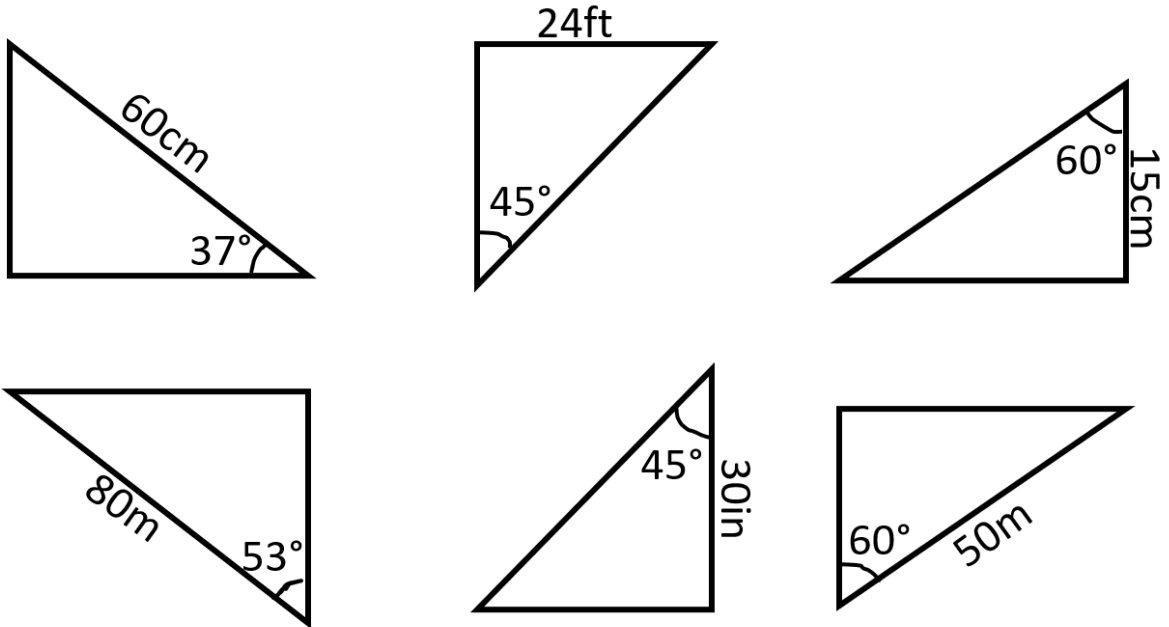
Para obtener en la calculadora las funciones $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$, primero debes presionar la tecla shift que se encuentra en la parte superior izquierda de la calculadora científica, y luego la razón trigonométrica que requieres.



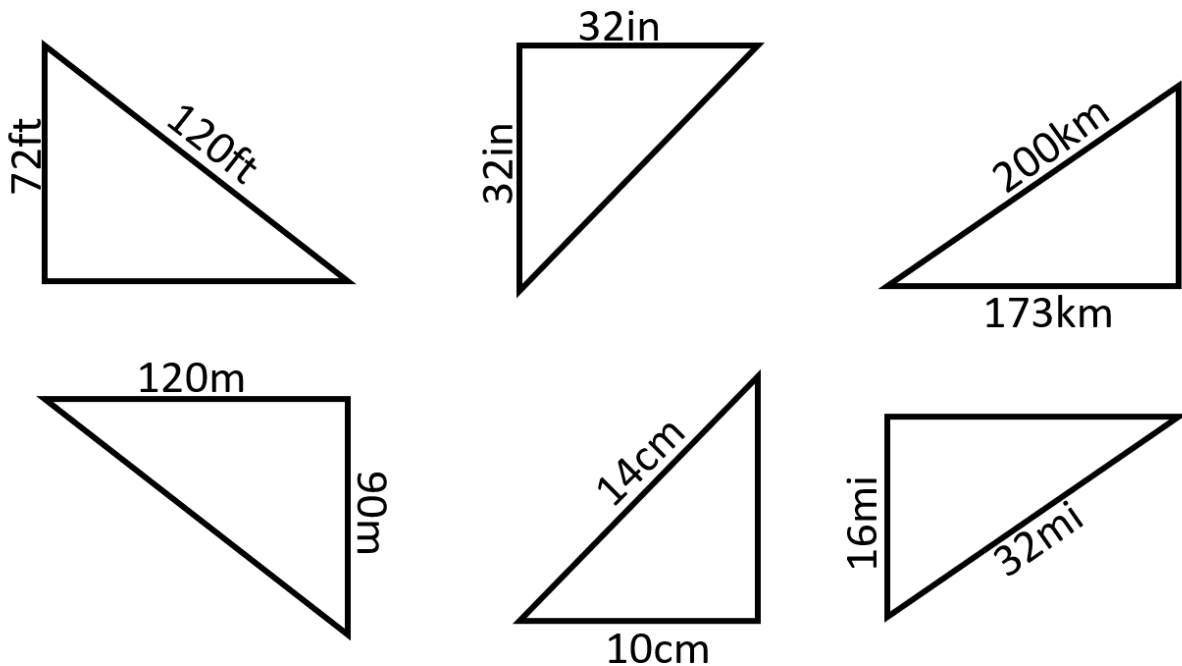
En el caso de las calculadoras de los celulares esta función puede obtenerse con las siguientes teclas: INV, 2nd, $\sin^{-1}$.
De igual manera, si utilizas la calculadora del celular, también puede aparecerte en la pantalla: arcsin, arccos, arctan.

ACTIVIDAD

1. Encuentra los lados faltantes en los siguientes triángulos rectángulos. (1 punto)



2. Encuentra los ángulos y lados faltantes en los siguientes triángulos rectángulos. (1 punto)



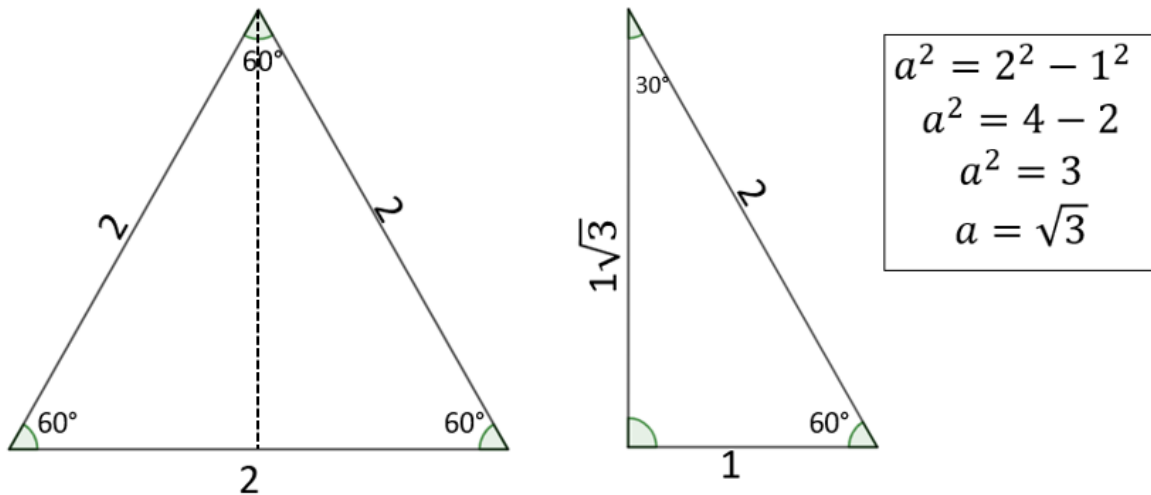
3. Para subir a una plataforma, se diseña una rampa cuya longitud es de 26m. Si la plataforma tiene un ángulo de elevación de 22.6° ¿Cuál es la altura de la plataforma? (0,5 puntos)
4. Estando en un parque, un ratón desde el suelo, observa un mango en la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 37° . Si el ratón se encuentra a 12m del árbol ¿A qué altura se encuentra el mango? (0,5 puntos)
5. Desde un avión que se encuentra sobre un punto A, un pasajero observa un barco con un ángulo de inclinación de 23° . Si el barco se encuentra a 24km del punto A ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el avión? (0,5 puntos)
6. Desde la parte superior de un edificio, una persona observa un carro con un ángulo de inclinación de 30° . Si la visual desde la persona hasta el carro recorre 400m ¿Cuál es la altura del edificio? ¿Cuál es la distancia desde el carro hasta el edificio? (0,5 puntos)
7. Una persona que eleva una cometa, suelta el total de la pita, la cual tiene una longitud de 150m. Si la pita forma un ángulo de 53° con el suelo ¿Cuál es la altura a la que se encuentra la cometa? (0,5 puntos)
8. Un transeúnte cuya altura es de 1,9m, observa la parte superior de un edificio con un ángulo de elevación de 53° . Si el transeúnte se encuentra a 60m del edificio ¿Cuál es la altura del edificio? (0,5 puntos)

ÁNGULOS NOTABLES

En trigonometría, los ángulos notables, son ángulos que se dan dentro de los triángulos rectángulos y que conservan ciertas características que son fáciles de recordar, lo que facilitan el proceso al momento de abordar ejercicios relacionados con las razones trigonométricas. A continuación, veremos de donde provienen algunos de esos ángulos notables, y algunas de sus características.

ÁNGULOS DE 30° Y 60°

Para entender las características de los ángulos de 30° y 60° como ángulos notables, hay que partir de un triángulo equilátero como el que se muestra en la figura. Estos triángulos tienen la particularidad no solo de tener todos sus lados iguales, sino que sus ángulos también tienen la misma medida, 60°. En el triángulo que se muestra, se puso una medida para sus lados de 2 unidades. Al trazar una línea que separe el triángulo por la mitad, se forman dos triángulos rectángulos, cuyos ángulos serán de 30° y 60°, su hipotenusa de 2 unidades y su cateto más pequeño de 1 unidad. Al aplicar el teorema de Pitágoras, se obtiene que el cateto más grande equivale a $\sqrt{3}$.



Al observar detenidamente esta imagen, cuando se tiene bien sea, un ángulo de 30° o 60°, se pueden considerar las siguientes características:

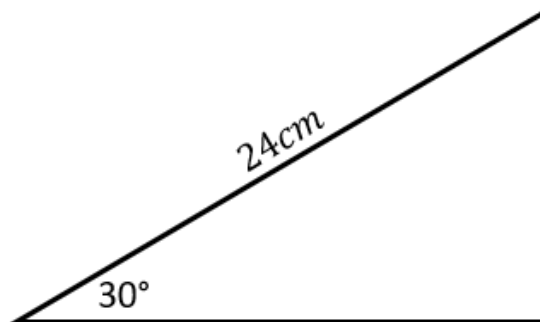
- El valor del cateto más pequeño, es la mitad de la hipotenusa.

- El valor del cateto más grande, es el mismo valor del cateto más pequeño multiplicado por raíz cuadrada de tres.

Observemos ahora algunos ejemplos de como estos ángulos notables nos facilitan el proceso de encontrar los lados faltantes en un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 1

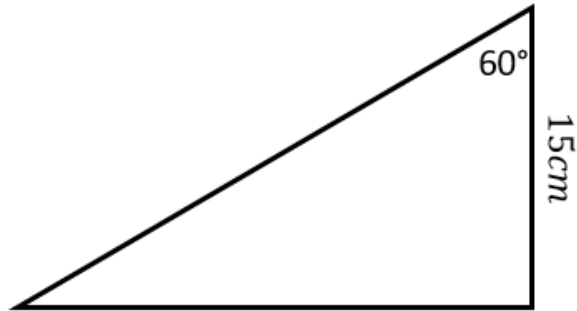
Encuentra los lados faltantes en los siguientes triángulos rectángulos.



	Dado que el ángulo es de 30°, el cateto más pequeño es la mitad de la hipotenusa. Si la hipotenusa vale 24cm, la hipotenusa es de 12cm.
	En el ángulo de 30°, el cateto más grande, es el valor del cateto más pequeño multiplicado por raíz de tres. Si el cateto más pequeño es 12cm, el cateto más grande vale $12\sqrt{3}cm$

EJEMPLO 2

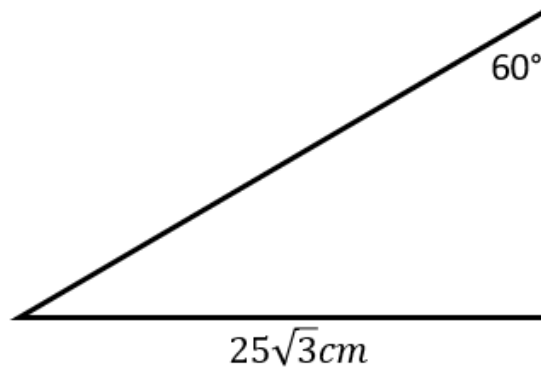
Encuentre los lados faltantes en el siguiente triángulo rectángulo.

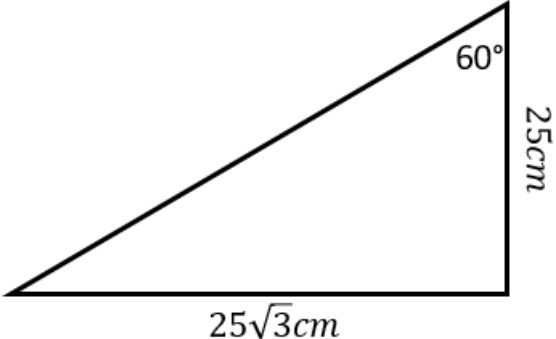
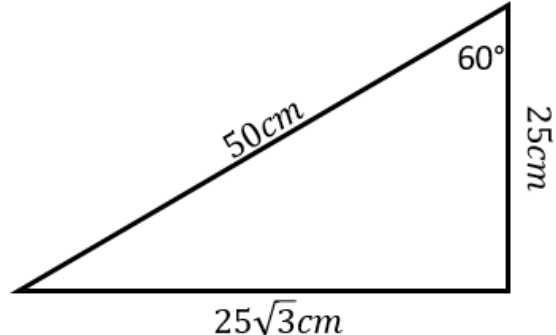


	En el ángulo de 60°, el cateto más pequeño es la mitad de la hipotenusa. Si el cateto más pequeño tiene un valor de 15cm, la hipotenusa debe tener un valor de 30cm.
	Así mismo, si el cateto más grande, tiene el mismo valor del cateto pequeño multiplicado por raíz de tres. Si el cateto más pequeño vale 15cm, el cateto más grande tiene un valor de $15\sqrt{3}cm$

EJEMPLO 3

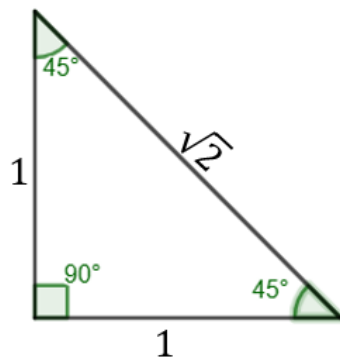
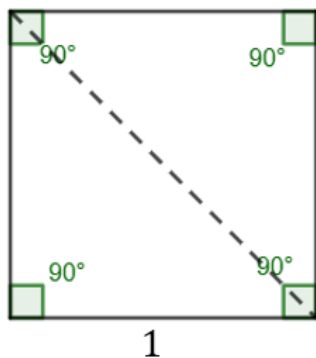
Encuentra el valor de los lados faltantes en el siguiente triángulo rectángulo.



	En el ángulo de 60°, el cateto más grande, es el mismo cateto pequeño multiplicado por raíz de tres. Si el cateto más grande es $25\sqrt{3}\text{cm}$, el cateto más pequeño vale 25cm.
	En este mismo ángulo, el cateto más pequeño es la mitad de la hipotenusa, por tanto, si el cateto más pequeño es 25cm, la hipotenusa vale 50cm.

ÁNGULO DE 45°

Para comprender las características del ángulo de 45° dentro del triángulo rectángulo, partimos de un cuadrado como el que se muestra en la figura, cuyo lado es de 1 unidad. Una segunda característica que hay que considerar de los cuadrados es que sus ángulos son de 90° . Si se traza una diagonal, se obtienen dos triángulos rectángulos cuyos ángulos tienen una medida de 45° . Al extraer uno de esos triángulos, se obtiene que ambos catetos tienen la medida de 1 unidad y al aplicar el teorema de Pitágoras, se obtiene que la hipotenusa es $\sqrt{2}$.



$$\begin{aligned}
 c^2 &= 1^2 + 1^2 \\
 c^2 &= 1 + 1 \\
 c^2 &= 2 \\
 c &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

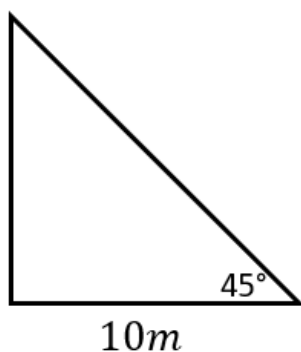
Al analizar más detalladamente la imagen, cuando se tiene un ángulo de 45° en un triángulo rectángulo, se obtienen las siguientes características.

- Los catetos siempre tienen el mismo valor.
- La hipotenusa tiene el valor del cateto multiplicado por la raíz cuadrada de 2.

Para comprender mejor como aplicar estas características al momento de encontrar los lados faltantes en un triángulo rectángulo cuando el ángulo es de 45° , observa los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Encuentre los lados faltantes en el siguiente triángulo rectángulo.



	En los ángulos de 45°, los catetos tienen la misma medida. Como en el ejercicio nos dicen que uno de los catetos vale 10cm, el otro cateto también vale 10cm.
	Continuando, otra característica de este ángulo es que la hipotenusa vale lo mismo del cateto multiplicado por la raíz de 2. Si ambos catetos miden 10m, la hipotenusa vale $10\sqrt{2}$ m.

ACTIVIDAD PRÁCTICA

1. Encuentra los valores faltantes en los siguientes triángulos rectángulos.

