Câu 1. **[2D2-7.1-4] (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Cho phương trình $\log_2\left(2x^2-4x+4\right)=2^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ và $0<x<100$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Tác giả: Lê Đức Hợp ; Fb: Le Hoop

Chọn C

Điều kiện: $2x^2-4x+4>0$ (*)

Ta có $\log_2\left(2x^2-4x+4\right)=2^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$

$\Leftrightarrow \log_2\left[2\left(x^2-2x+2\right)\right]+\left(x^2-2x+1\right)=2^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-2x+2\right)+\log_2 2+\left(x^2-2x+1\right)=2^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-2x+2\right)+\left(x^2-2x+2\right)=2^{y^2}+y^2$ (1).

Xét hàm $f(t)=2^t+t$

Ta có $f'(t)=2^t.\ln 2+1>0$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(1) $\Leftrightarrow f\left(\log_2\left(x^2-2x+2\right)\right)=f\left(y^2\right)$ $\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-2x+2\right)=y^2$ $\Leftrightarrow x^2-2x+2=2^{y^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+1=2^{y^2}$.

Do $0<x<100$ $\Rightarrow 1\le (x-1)^2+1=2^{y^2}\le 99^2+1$ $\Rightarrow 0\le y^2\le \log_2\left(99^2+1\right)$; do y nguyên dương nên ta suy ra $1\le y\le 3$.

+) $y=1$ $\Rightarrow x^2-2x+2=2$ $\Leftrightarrow x^2-2x=0$ $\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn Đk (*) và x nguyên dương).

+) $y=2$ $\Rightarrow x^2-2x+2=16$ $\Rightarrow x^2-2x-14=0$ (Không có giá trị nguyên nào thỏa mãn).

+) $y=3$ $\Rightarrow x^2-2x+2=512$ $\Rightarrow x^2-2x-510=0$ (Không có giá trị nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x;y)=(2;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

nguyenminh78vn@gmail.com

Câu 2. **[2D2-7.1-4] (THPT-YÊN-LẠC)** Cho phương trình $27^x+3x.9^x+\left(3x^2+1\right)3^x=\left(m^3-1\right)x^3+(m-1)x$, m là tham số. Biết rằng giá trị m nhỏ nhất để phương trình đã cho có nghiệm trên $(0;+\infty)$ là $a+\mathrm{e}\ln b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $17a+3b$ bằng

A. 26. **B.** 54. **C.** 48. **D.** 18.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tuấn Phương; Fb: Nguyễn Tuấn Phương

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương $x^3+3x^2 3^x+3x.\left(3^x\right)^2+\left(3^x\right)^3+x+3^x=\left(mx\right)^3+mx$

$\Leftrightarrow \left(x+3^x\right)^3+x+3^x=\left(mx\right)^3+mx$ $(*)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ $(*)$ suy ra $x+3^x=mx$. Vì $x>0$ suy ra $1+\dfrac{3^x}{x}=m$.

Xét hàm số $f(x)=1+\dfrac{3^x}{x}$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{\left(3^x\ln 3\right)x-3^x}{x^2}=0\Leftrightarrow 3^x\left(x\ln 3-1\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 3}=\log_3 \mathrm{e}$.

Dấu của $f'\left(x\right)$ cũng là dấu của nhị thức bậc nhất $x\ln 3-1$, do đó ta có bảng biến thiên:

x	0		$\log_3 e$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$1+e.\ln 3$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của m để phương trình có nghiệm là $m=1+\mathrm{e}\ln 3$.

Suy ra $a=1,\ b=3\Rightarrow 17a+3b=17+9=26$. Do đó chọn đáp án A.