

CONTOH SOAL SISTEM KOORDINAT, ANALIS VEKTOR DAN PENERAPANNYA
DALAM TEORI MEDAN ELEKTROSTATIS

1. Jika suatu medan diberikan oleh: $\vec{A} = x^2 y \hat{x} + yz^2 \hat{y} - xyz \hat{z}$. Tentukan:

a. $\nabla \cdot \vec{A}$

b. $\int (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau$ pada sebuah kubus yang panjang sisinya a

c. Apakah medan ini merupakan medan elektrostatik ?

Jawab:

Medan yang diberikan: $A(x, y, z) = x^2 y \hat{x} + yz^2 \hat{y} - xyz \hat{z}$.

(a) Divergensi $\nabla \cdot A$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y} (yz^2) + \frac{\partial}{\partial z} (-xyz).$$

Hitung tiap suku:

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) = 2xy,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (yz^2) = z^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (-xyz) = -xy.$$

Jadi

$$\nabla \cdot A = 2xy + z^2 - xy = xy + z^2.$$

(b) $\int (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau$ untuk kubus sisi a (dengan $0 \leq x, y, z \leq a$)

Kita integralkan

$$\int (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau = \iiint_V (xy + z^2) dx dy dz = \iiint_V xy dx dy dz + \iiint_V z^2 dx dy dz.$$

Karena batas terpisah (0 sampai a):

Untuk suku xy :

$$\iiint xy dx dy dz = \left(\int_0^a x dx \right) \left(\int_0^a y dy \right) \left(\int_0^a dz \right) = \left(\frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a^2}{2} \right) (a) = \frac{a^5}{4}.$$

Untuk suku z^2 :

$$\iiint z^2 dx dy dz = \left(\int_0^a dx \right) \left(\int_0^a dy \right) \left(\int_0^a z^2 dz \right) = (a)(a) \frac{a^3}{3} = \frac{a^5}{3}.$$

Total:

$$\int (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau = \frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{3} = \frac{7}{12} a^5.$$

Dapat juga dihitung dengan Teorema Divergensi yang memberikan hasil yang sama

(c) Apakah medan ini adalah medan elektrostatis? Untuk membuktikannya, kita harus menghitung nilai $\nabla \times A$, jika nilainya sama dengan nol maka A adalah medan elektrostatis, jika tidak nol, maka bukan medan elektrostatis. Untuk menghitung $\nabla \times A$, kita dapat menggunakan definisi dari masing-masing komponennya:

$$(\nabla \times A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, (\nabla \times A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, (\nabla \times A)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Hitung satu per satu (dengan $A_x = x^2 y$, $A_y = yz^2$, $A_z = -xyz$):

- $(\nabla \times A)_x = \partial_y(-xyz) - \partial_z(yz^2) = -xz - 2yz = -z(x + 2y).$
- $(\nabla \times A)_y = \partial_z(x^2 y) - \partial_x(-xyz) = 0 - (-yz) = yz.$
- $(\nabla \times A)_z = \partial_x(yz^2) - \partial_y(x^2 y) = 0 - x^2 = -x^2.$

Jadi

$$\nabla \times A = -z(x + 2y) \hat{x} + yz \hat{y} - x^2 \hat{z}.$$

Karena **tidak bernilai nol**, maka medan **A bukan** medan elektrostatis

2. Diberikan medan dalam sistem koordinat silinder $\vec{A} = \rho^3 \hat{\rho} + \rho \cos \phi \hat{\phi} + z^2 \hat{z}$.

- Hitunglah divergensi dari medan $\vec{A}$
- Hitunglah Curl (rotasi) dari medan $\vec{A}$
- Hitunglah fluks dengan menggunakan persamaan $\Phi_{\text{selubung}} = \int \vec{A} \cdot d\vec{a}$ melalui **permukaan samping silinder** dengan jari-jari R dan panjang silinder L (sumbu silinder sejajar sumbu

z , z dari $-L/2$ sampai $+L/2$).

Jawab:

a. Divergensi dari medan $\vec{A}$

Diberikan:

$$\vec{A} = \rho^3 \hat{\rho} + \rho \cos \phi \hat{\phi} + z^2 \hat{z}$$

Hitung:

$$\nabla \cdot \vec{A}.$$

Komponen ρ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \rho^3) = \frac{1}{\rho} (4\rho^3) = 4\rho^2$$

Komponen ϕ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \cos \phi) = \frac{1}{\rho} (-\rho \sin \phi) = -\sin \phi$$

Komponen z :

$$\frac{\partial}{\partial z} (z^2) = 2z$$

Total:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 4\rho^2 - \sin \phi + 2z.$$

b. Curl (rotasi) dari medan $\vec{A}$

Rumus komponen curl dalam koordinat silinder (ρ, ϕ, z) adalah (standar):

$$(\nabla \times \vec{A})_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_{\phi}}{\partial z}, \quad (\nabla \times \vec{A})_{\phi} = \frac{\partial A_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \quad (\nabla \times \vec{A})_z = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\phi}) - \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} \right).$$

Sekarang substitusi komponen $A_{\rho} = \rho^3$, $A_{\phi} = \rho \cos \phi$, $A_z = z^2$.

Hitung $(\nabla \times \vec{A})_{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_{\phi}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \cdot 0 - 0 = 0,$$

karena $A_z = z^2$ tidak bergantung pada ϕ , dan A_{ϕ} tidak bergantung pada z .

Hitung $(\nabla \times \vec{A})_{\phi}$:

$$\frac{\partial A_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = 0 - 0 = 0,$$

karena $A_{\rho} = \rho^3$ tidak bergantung pada z , dan $A_z = z^2$ tidak bergantung pada ρ .

Hitung $(\nabla \times \vec{A})_z$:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right).$$

$$\rho A_\phi = \rho \cdot (\rho \cos \phi) = \rho^2 \cos \phi \text{ sehingga } \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) = 2\rho \cos \phi.$$

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} = \frac{\partial (\rho^3)}{\partial \phi} = 0.$$

Jadi

$$(\nabla \times \vec{A})_z = \frac{1}{\rho} (2\rho \cos \phi - 0) = 2 \cos \phi.$$

Sehingga

$$\nabla \times \vec{A} = (\nabla \times \vec{A})_\rho \hat{\rho} + (\nabla \times \vec{A})_\phi \hat{\phi} + (\nabla \times \vec{A})_z \hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \hat{\rho} + 0 \hat{\phi} + 2 \cos \phi \hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = 2 \cos \phi \hat{z}$$

c. fluks dengan menggunakan persamaan $\Phi_{selubung} = \int \vec{A} \cdot d\vec{a}$ melalui **permukaan samping**

silinder dengan jari-jari R dan panjang silindernya L (sumbu silinder sejajar sumbu z , z dari $-L/2$ sampai $+L/2$).

Kita hitung fluks melalui permukaan samping silinder berjari-jari R dan tinggi L (dari $z = -L/2$ sampai $z = +L/2$).

- Pada permukaan samping arah vektor normal $\hat{n}$ sejajar dengan vektor satuan dalam arah radial $\hat{\rho}$, jadi dapat dipilih $\hat{n} = \hat{\rho}$.
- Elemen luas: $d\vec{a} = R d\phi dz \hat{\rho}$.
- Oleh karena itu $\vec{A} \cdot d\vec{a} = A_\rho R d\phi dz$.

Di permukaan silinder $\rho = R$, sehingga $A_\rho = \rho^3$ menjadi $A_\rho = R^3$. (Perhatikan A_ϕ dan A_z tidak masuk karena *dot product* dengan $\hat{\rho}$ hanya memerlukan komponen $\hat{\rho}$.)

Jadi integrand konstan terhadap ϕ dan z :

$$\vec{A} \cdot d\vec{a} = R^3 \cdot R d\phi dz = R^4 d\phi dz.$$

Integralkan melintasi $\phi \in [0, 2\pi]$ dan $z \in [-L/2, +L/2]$:

$$\Phi_{selubung} = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} R^4 dz d\phi = R^4 \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_{-L/2}^{L/2} dz \right).$$

Hitung integral satu-per-satu:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz = L.$$

Sehingga

$$\Phi_{selubung} = \iint_{S_{selubung}} \vec{A} \cdot d\vec{a} = 2\pi L R^4.$$

3. Diberikan potensial skalar (dalam dalam sistem koordinat bola) $V(r, \theta) = A r^2 \cos\theta$, dengan A adalah suatu konstanta.
 - a. Hitung medan elektrostatis $E(r)$.
 - b. Tentukan rapat muatan volumet $\rho(r)$ yang berkaitan dengan potensial ini

Jawab :

- a. Medan elektrostatis dapat dihitung dari gradien potensial melalui persamaan

$$\vec{E} = - \nabla V$$

Dalam sistem koordinat bola (r, θ, ϕ) gradien untuk fungsi $V(r, \theta, \phi)$ adalah

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}.$$

Karena V tidak bergantung pada ϕ , komponen $\hat{\phi}$ nol.

Kita hitung turunan parsialnya satu per satu:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (A r^2 \cos\theta) = 2A r \cos\theta.$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (A r^2 \cos\theta) = -A r^2 \sin\theta.$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.$$

Sehingga

$$\nabla V = (2A r \cos\theta) \hat{r} + \frac{1}{r} (-A r^2 \sin\theta) \hat{\theta} = 2A r \cos\theta \hat{r} - A r \sin\theta \hat{\theta}.$$

Maka medan listrik

$$E = -\nabla V = -(2A \cos \theta \hat{r} - A \sin \theta \hat{\theta}) = -2A \cos \theta \hat{r} + A \sin \theta \hat{\theta}.$$

Atau dalam bentuk komponen:

$$E_r = -2A \cos \theta,$$

$$E_\theta = A \sin \theta,$$

$$E_\phi = 0.$$

- b. Rapat muatan volume ρ dapat dihitung dengan menggunakan hukum Gauss dalam bentuk differensial

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \epsilon_0 (\nabla \cdot E)$$

$$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right)$$

Karena $E_\phi = 0$, maka

$$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) \right)$$

$$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 [-2A \cos \theta]) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta [A \sin \theta]) \right)$$

$$\rho = \epsilon_0 A \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 [-2 \cos \theta]) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta [\sin \theta]) \right)$$

$$\rho = \epsilon_0 A \left(-2 \cos \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) + \frac{1}{r \sin \theta} r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \right)$$

$$\rho = \epsilon_0 A \left(-2 \cos \theta \frac{1}{r^2} (3r^2) + \frac{1}{\sin \theta} (2 \sin \theta \cos \theta) \right)$$

$$\rho = \epsilon_0 A (-6 \cos \theta + 2 \cos \theta)$$

$$\rho = -4\epsilon_0 A \cos \theta$$

4. Jika potensial listrik dalam suatu daerah tertentu dinyatakan oleh

$V(x, y) = Axy - Bx^2 - Cy$; dengan A , B dan C adalah konstanta-konstanta yang bernilai positif, tentukanlah:

- a. Medan listrik di daerah tersebut

- b. Titik-titik di daerah tersebut yang medan listriknya bernilai nol (nyatakan dalam A , B dan C)

Jawab:

- a. Medan listrik dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$E = - \nabla V$$

$$E = - \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y}$$

Karena $V(x, y) = Axy - Bx^2 + Cy$, maka

$$E = - (Ay - 2Bx) \hat{x} - (Ax - C) \hat{y}$$

- b. Titik-titik yang medan listriknya nol

$$E = 0$$

$$- (Ay - 2Bx) \hat{x} - (Ax - C) \hat{y} = 0$$

Yang akan dipenuhi jika

$$Ay - 2Bx = 0$$

dan

$$Ax - C = 0$$

sehingga

$$x = C/A$$

dan

$$Ay - 2Bx = 0$$

$$Ay - 2B(C/A) = 0$$

$$y = \frac{2BC}{A^2}$$

5. Jadi Titik-titik yang medan listriknya nol adalah $x = C/A$ dan $y = 2BC/A^2$.