Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez

Radicación

La radiación es la operación inversa de la potenciación y consiste en hallar la base conocidos el exponente y la potencia. Así por ejemplo si $2^4 = 16$, se tiene que $\sqrt[4]{16} = 2$, donde el signo $\sqrt{\ }$ se denomina signo radical, 16 es la cantidad subradical, 2 es la raíz cuarta y el número 4 que aparece en el signo radical recibe el nombre de índice de la raíz.

Cuando el índice de la raíz es 2, se dice que la raíz es cuadrada y el índice suele omitirse. Así pues, la raíz de un número es otro número que elevado a la potencia que indica el índice coincide con la cantidad subradical.

Una raíz es exacta cuando al elevarla a una potencia que indica el índice coincide con la cantidad subradical.

Propiedades de la radicación.

a.) ***Potencia con exponente fraccionario***

Esta propiedad se expresa de la siguiente manera $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, es decir, un radical se puede representar como una potencia con exponente fraccionario, en donde el exponente de la cantidad subradical se escribe como el numerador y el índice de la raíz es el denominador de dicho exponente fraccionario. Veamos unos ejemplos numéricos de esto.

$\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$; $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{11^7} = 11^{\frac{7}{2}}$

b.) ***Raíz de un producto***

Esta propiedad se expresa de la siguiente manera $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, es decir, la raíz de índice n de un producto es igual al producto de las raíces de las cantidades subradicales teniendo el mismo índice. Veamos unos ejemplos de esta propiedad.

$\sqrt[4]{7\cdot 3}=\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[5]{x^2y^3}=\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{y^3}$

c.) ***Raíz de un cociente***

Esta propiedad se expresa matemáticamente así $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, es decir, la raíz de un cociente es igual a el cociente de las raíces de las cantidades subradicales con el mismo índice de la raíz anterior. Veamos unos ejemplos

$\sqrt[7]{\dfrac{11}{13}}=\dfrac{\sqrt[7]{11}}{\sqrt[7]{13}}$; $\sqrt[23]{\dfrac{y^5}{x^7}}=\dfrac{\sqrt[23]{y^5}}{\sqrt[23]{x^7}}$

d.) ***Raíz de una raíz***

Esta propiedad conocida también como raíz inversa se expresa de la siguiente forma $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$, es decir, la raíz enésima de la raíz emésima de una cantidad subradical es igual a la raíz de la misma cantidad subradical cuyo índice es el producto de los índices anteriores. Esta fórmula se puede extender a más de dos raíces, el por qué se denomina raíz inversa no será objeto de estudio en este curso. A continuación veamos algunos ejemplos.

$\sqrt[9]{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[9\cdot 5]{4}=\sqrt[45]{4}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^4}}}=\sqrt[3\cdot 4\cdot 5]{a^4}=\sqrt[60]{a^4}$

e.) ***Potencia de una raíz***

Esta propiedad se expresa de la siguiente forma $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k=\sqrt[n]{a^{m\cdot k}}$, es decir, la potencia de una raíz de una cantidad subradical elevada a un exponente cualquiera es igual a la raíz de la misma cantidad subradical cuyo exponente es multiplicado por el exponente externo a la raíz. Veamos unos ejemplos

$$\left(\sqrt[8]{7^2}\right)^3=\sqrt[8]{7^{2\cdot 3}}=\sqrt[8]{7^6}$$

$$\left(\sqrt[4]{x^7y^2}\right)^5=\sqrt[4]{x^{7\cdot 5}y^{2\cdot 5}}=\sqrt[4]{7^{35}y^{10}}$$

Amplificación de radicales

La amplificación de radicales se realiza por medio de un procedimiento muy simple, la explicación teórica es como sigue

dado una radical $\sqrt[n]{a^m}$ su amplificación por un número entero positivo cualquiera k se realiza multiplicando el índice de la raíz y los exponentes de la cantidad subradical por dicho número. A continuación visualicemos esto con unos ejemplos

Amplifiquemos $\sqrt[3]{2^4\cdot 7^2\cdot 3^5}$ por 6, aplicando el procedimiento anteriormente descrito tenemos

$$\sqrt[3\cdot 6]{2^{4\cdot 6}\cdot 7^{2\cdot 6}\cdot 3^{5\cdot 6}}=\sqrt[18]{2^{24}\cdot 7^{12}\cdot 3^{30}}$$

Amplifiquemos $\sqrt[5]{x^3y^2z^4}$ por 5, como en el ejemplo anterior aplicamos el procedimiento ya descrito quedando así

$$\sqrt[5\cdot 5]{x^{3\cdot 5}y^{2\cdot 5}z^{4\cdot 5}}=\sqrt[25]{x^{15}y^{10}z^{20}}$$

Simplificación de radicales

La simplificación de radicales se realiza por medio de un procedimiento en sentido inverso a la amplificación, la explicación teórica es como sigue

dado una radical $\sqrt[n]{a^m}$ su simplificación por un número entero positivo cualquiera k se realiza dividiendo el índice de la raíz y los exponentes de la cantidad subradical por dicho número. A continuación visualicemos esto con unos ejemplos

tomando los resultados de los ejemplo anteriores procedamos ahora a realizar sus respectivas simplificaciones procedamos a simplificar $\sqrt[18]{2^{24}\cdot 7^{12}\cdot 3^{30}}$ por 6, aplicando lo expresado en la explicación teórica tenemos

$$\sqrt[18\div 6]{2^{24\div 6}\cdot 7^{12\div 6}\cdot 3^{30\div 6}} = \sqrt[3]{2^{4}\cdot 7^{2}\cdot 3^{5}}$$

de la misma forma vamos a simplificar $\sqrt[25]{x^{15}y^{10}z^{20}}$ por 5

$$\sqrt[25\div 5]{x^{15\div 5}y^{10\div 5}z^{20\div 5}} = \sqrt[5]{x^{3}y^{2}z^{4}}$$

Ejercicios propuestos

a.) Convertir los siguientes radicales en potencias con exponentes fraccionarios

$\sqrt[3]{5^2}$; $\sqrt[7]{x^3}$; $\sqrt[4]{9^5}$; $\sqrt{y^3}$

b.) Convertir las siguientes potencias con exponentes fraccionarios en radicales

$7^{\frac{5}{3}}$; $x^{\frac{3}{4}}$; $5^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{7}{8}}$

c.) Aplicar las propiedades de los radicación según corresponda

$\sqrt[3]{5\cdot 4}$; $\sqrt[11]{x^5y^7z^3}$

$\sqrt[5]{\frac{5}{3}}$; $\sqrt[14]{\frac{x^8}{y^5}}$

$\sqrt[8]{\sqrt[5]{2^3}}$; $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{xy^2}}}$

$\left(\sqrt[3]{7^4}\right)^5$; $\left(\sqrt[5]{a^3b^2c}\right)^4$

d.) Amplificar los siguientes radicales primero por 2, luego por 5 y por último por 9

$\sqrt[3]{2^4\cdot 7^2}$; $\sqrt[51]{x^7y^8z^{11}}$; $\sqrt{5^5\cdot 2\cdot 3^4}$

e.) Simplificar los siguientes radicales por 2, por 5 o por 3 según corresponda

$\sqrt[14]{2^6 \cdot 5^8 \cdot 3^{10}}$; $\sqrt[20]{x^{10} y^{15} z^5}$; $\sqrt[21]{5^{12} \cdot 6^{24} \cdot 3^{15}}$