

Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez

Radicación

La radiación es la operación inversa de la potenciación y consiste en hallar la base conocidos el exponente y la potencia. Así por ejemplo si $2^4 = 16$, se tiene que $\sqrt[4]{16} = 2$, donde el signo $\sqrt{\quad}$ se denomina signo radical, 16 es la cantidad subradical, 2 es la raíz cuarta y el número 4 que aparece en el signo radical recibe el nombre de índice de la raíz.

Cuando el índice de la raíz es 2, se dice que la raíz es cuadrada y el índice suele omitirse. Así pues, la raíz de un número es otro número que elevado a la potencia que indica el índice coincide con la cantidad subradical.

Una raíz es exacta cuando al elevarla a una potencia que indica el índice coincide con la cantidad subradical.

Propiedades de la radicación.

a.) *Potencia con exponente fraccionario*

Esta propiedad se expresa de la siguiente manera $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, es decir, un radical se puede representar como una potencia con exponente fraccionario, en donde el exponente de la cantidad subradical se escribe como el numerador y el índice de la raíz es el denominador de dicho exponente fraccionario. Veamos unos ejemplos numéricos de esto.

$$\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}} ; \quad \sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}} ; \quad \sqrt{11^7} = 11^{\frac{7}{2}}$$

b.) *Raíz de un producto*

Esta propiedad se expresa de la siguiente manera $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, es decir, la raíz de índice n de un producto es igual al producto de las raíces de las cantidades subradicales teniendo el mismo índice. Veamos unos ejemplos de esta propiedad.

$$\sqrt[4]{7 \cdot 3} = \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{3} ; \quad \sqrt[5]{x^2 y^3} = \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{y^3}$$

c.) Raíz de un cociente

Esta propiedad se expresa matemáticamente así $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, es decir, la raíz de un cociente es igual a el cociente de las raíces de las cantidades subradicales con el mismo índice de la raíz anterior. Veamos unos ejemplos

$$\sqrt[7]{\frac{11}{13}} = \frac{\sqrt[7]{11}}{\sqrt[7]{13}} ; \quad \sqrt[23]{\frac{y^5}{x^7}} = \frac{\sqrt[23]{y^5}}{\sqrt[23]{x^7}}$$

d.) Raíz de una raíz

Esta propiedad conocida también como raíz inversa se expresa de la siguiente forma $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$, es decir, la raíz enésima de la raíz emésima de una cantidad subradical es igual a la raíz de la misma cantidad subradical cuyo índice es el producto de los índices anteriores. Esta fórmula se puede extender a más de dos raíces, el por qué se denomina raíz inversa no será objeto de estudio en este curso. A continuación veamos algunos ejemplos.

$$\sqrt[9]{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[9 \cdot 5]{4} = \sqrt[45]{4}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^4}}} = \sqrt[3 \cdot 4 \cdot 5]{a^4} = \sqrt[60]{a^4}$$

e.) Potencia de una raíz

Esta propiedad se expresa de la siguiente forma $(\sqrt[n]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^{m \cdot k}}$, es decir, la potencia de una raíz de una cantidad subradical elevada a un exponente cualquiera es igual a la raíz de la misma cantidad subradical cuyo

exponente es multiplicado por el exponente externo a la raíz. Veamos unos ejemplos

$$\left(\sqrt[8]{7^2}\right)^3 = \sqrt[8]{7^{2 \cdot 3}} = \sqrt[8]{7^6}$$

$$\left(\sqrt[4]{x^7 y^2}\right)^5 = \sqrt[4]{x^{7 \cdot 5} y^{2 \cdot 5}} = \sqrt[4]{7^{35} y^{10}}$$

Amplificación de radicales

La amplificación de radicales se realiza por medio de un procedimiento muy simple, la explicación teórica es como sigue

dado una radical $\sqrt[n]{a^m}$ su amplificación por un número entero positivo cualquiera k se realiza multiplicando el índice de la raíz y los exponentes de la cantidad subradical por dicho número. A continuación visualicemos esto con unos ejemplos

Amplifiquemos $\sqrt[3]{2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^5}$ por 6, aplicando el procedimiento anteriormente descrito tenemos

$$\sqrt[3 \cdot 6]{2^{4 \cdot 6} \cdot 7^{2 \cdot 6} \cdot 3^{5 \cdot 6}} = \sqrt[18]{2^{24} \cdot 7^{12} \cdot 3^{30}}$$

Amplifiquemos $\sqrt[5]{x^3 y^2 z^4}$ por 5, como en el ejemplo anterior aplicamos el procedimiento ya descrito quedando así

$$\sqrt[5 \cdot 5]{x^{3 \cdot 5} y^{2 \cdot 5} z^{4 \cdot 5}} = \sqrt[25]{x^{15} y^{10} z^{20}}$$

Simplificación de radicales

La simplificación de radicales se realiza por medio de un procedimiento en sentido inverso a la amplificación, la explicación teórica es como sigue

dado una radical $\sqrt[n]{a^m}$ su simplificación por un número entero positivo cualquiera k se realiza dividiendo el índice de la raíz y los exponentes de la cantidad subradical por dicho número. A continuación visualicemos esto con unos ejemplos

tomando los resultados de los ejemplo anteriores procedamos ahora a realizar sus respectivas simplificaciones

procedamos a simplificar $\sqrt[18]{2^{24} \cdot 7^{12} \cdot 3^{30}}$ por 6, aplicando lo expresado en la explicación teórica tenemos

$$18 \div 6 \sqrt[2^{24 \div 6} \cdot 7^{12 \div 6} \cdot 3^{30 \div 6}]{} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^5}$$

de la misma forma vamos a simplificar $\sqrt[25]{x^{15} y^{10} z^{20}}$ por 5

$$25 \div 5 \sqrt[x^{15 \div 5} y^{10 \div 5} z^{20 \div 5}]{} = \sqrt[5]{x^3 y^2 z^4}$$

Ejercicios propuestos

a.) Convertir los siguientes radicales en potencias con exponentes fraccionarios

$$\sqrt[3]{5^2} ; \sqrt[7]{x^3} ; \sqrt[4]{9^5} ; \sqrt{y^3}$$

b.) Convertir las siguientes potencias con exponentes fraccionarios en radicales

$$7^{\frac{5}{3}} ; x^{\frac{3}{4}} ; 5^{\frac{1}{2}} ; a^{\frac{7}{8}}$$

c.) Aplicar las propiedades de los radicación según corresponda

$$\sqrt[3]{5 \cdot 4} ; \sqrt[11]{x^5 y^7 z^3}$$

$$\sqrt[5]{\frac{5}{3}} ; \sqrt[14]{\frac{x^8}{y^5}}$$

$$\sqrt[8]{\sqrt[5]{2^3}} ; \sqrt[7]{\sqrt[5]{4 \sqrt[4]{xy^2}}}$$

$$\left(\sqrt[3]{7^4}\right)^5 ; \left(\sqrt[5]{a^3 b^2 c}\right)^4$$

d.) Amplificar los siguientes radicales primero por 2, luego por 5 y por último por 9

$$\sqrt[3]{2^4 \cdot 7^2} ; \sqrt[51]{x^7 y^8 z^{11}} ; \sqrt{5^5 \cdot 2 \cdot 3^4}$$

e.) Simplificar los siguientes radicales por 2, por 5 o por 3 según corresponda

$$\sqrt[14]{2^6 \cdot 5^8 \cdot 3^{10}} ; \sqrt[20]{x^{10} y^{15} z^5} ; \sqrt[21]{5^{12} \cdot 6^{24} \cdot 3^{15}}$$