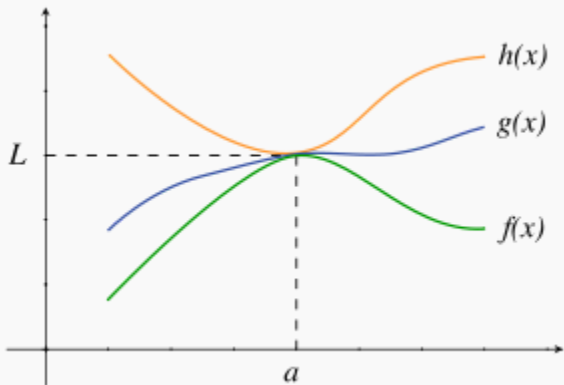


Théorème des gendarmes



Deux fonctions *f* et *h* qui admettent la même limite *L* au point *a* et une fonction *g* prise en « étou » entre *f* et *h* dans le voisinage de *a*. Le théorème sandwich stipule donc que *g* admet *L* comme limite en *a*.

En **analyse**, le **théorème des gendarmes** (également appelé **théorème d'encadrement**, **théorème du pincement**, **théorème de l'étou** ou **théorème du sandwich**) est un **théorème** concernant la **limite d'une fonction**. Ce théorème stipule que si deux **fonctions** (*f* et *h*) admettent la même limite en un point (*a*) et qu'une troisième fonction (*g*) est prise en « étou » (ou « encadrée » ou « prise en sandwich ») entre *f* et *h* dans le **voisinage** de *a*, alors *g* admet la même limite en *a*.

Le théorème des gendarmes est une technique très importante en **calcul infinitésimal** et en analyse. Il est généralement utilisé afin de déterminer la limite d'une fonction via la comparaison avec deux autres fonctions dont la limite est connue ou facilement calculable.

Sommaire

[\[masquer\]](#)

1 Énoncé

○

1.1 Remarques

2 Origine du nom

3 Démonstration

4 Exemple

5 Variantes

○

5.1 Articles connexes

Énoncé[modifier]

Soit *I* un **intervalle** contenant le point *a*. Soit *f*, *g* et *h* trois fonctions réelles définies sur l'intervalle *I*, sauf possiblement au point *a*.

- si pour tout *x* de *I* qui n'est pas égal à *a* on a *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) ≤ *h*(*x*)
- et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$,
- alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

Remarques[modifier]

- a* peut être situé à l'intérieur de l'intervalle *I* ou à une de ses **bornes** (extrémités). En effet, dans ce dernier cas, on considérera la limite à gauche ou la limite à droite.
- a* peut être fini ou **infini**. En effet, basé sur la remarque précédente, si, par exemple, *I* = [0, +∞[, nous pouvons utiliser la limite lorsque *x* → +∞.

Origine du nom[modifier]

Cette section **ne cite pas suffisamment ses sources**. Merci d'ajouter **en note** des références **vérifiables** ou le modèle {{Référence souhaitée}}.

Pour comprendre le nom familier du théorème, il faut assimiler les fonctions *f* et *h* à des **gendarmes** et *g* à un délinquant. Ce dernier, encadré par les deux gendarmes, est obligé de les suivre jusqu'à la gendarmerie *L*. En Italie, on l'appelle « théorème des **carabinieri** », « théorème de l'affrontement », ou encore « théorème du sandwich »...

Démonstration[modifier]

La démonstration met directement en œuvre la notion de **voisinage** de *a* et la définition de la **limite**.

Pour tout intervalle ouvert *U* contenant *L*,

- Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, il existe un voisinage *V*₁ de *a* tel que

pour tout *x* de *V*₁, *f*(*x*) ∈ *U*
- Puisque $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, il existe un voisinage *V*₂ de *a* tel que

pour tout *x* de *V*₂, *h*(*x*) ∈ *U*

- Enfin, d'après la propriété d'encadrement, il existe un voisinage V_3 de a tel que

pour tout x de V_3 , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

L'intersection de trois voisinages est un voisinage donc $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ est un voisinage de a et pour tout a de V , on a

- $f(x) \in U$
- $h(x) \in U$
- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

d'où il vient que pour tout voisinage U contenant L , il existe un voisinage V tel que $x \in V$ implique $g(x) \in U$,

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

Exemple[\[modifier\]](#)

Montrons que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

On a, pour tout réel x :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Donc, pour tout réel x strictement positif :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème dit « des gendarmes » :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Variantes[\[modifier\]](#)

Des variantes de ce théorème existent pour des fonctions dont la limite est infinie, mais ce sont des théorèmes de comparaison distincts de celui des gendarmes (à donc utiliser en écrivant « d'après un théorème de comparaison »).

Si f, g sont deux fonctions réelles définies sur un même intervalle I , telles que pour tout x de I dans un [voisinage](#) de a :

$$f(x) \leq g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ (a fini ou non), alors on a aussi : } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

Si f, g sont deux fonctions réelles définies sur un même intervalle I , telles que pour tout x de I dans un [voisinage](#) de a :

$$f(x) \leq g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \text{ (a fini ou non), alors on a aussi : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Si f, g sont deux fonctions réelles définies sur un même intervalle I , telles que pour tout x de I dans un [voisinage](#) de a :

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ (a fini ou non), alors on a aussi : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Enfin des théorèmes analogues existent pour des [limites de suites](#)

Si u, v et w sont trois suites réelles, telles que pour tout $n > N$

$$u_n \leq v_n \leq w_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L, \text{ alors on a aussi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$$

avec les variantes pour les limites infinies.

Les démonstrations de toutes ces variantes sont analogues à celle développée plus haut.