

Урок 29

Тема уроку Кут між прямою і площиною.

Мета уроку: формування поняття кута між прямою і площиною, а також умінь учнів знаходити кути між прямою і площиною.

Хід уроку

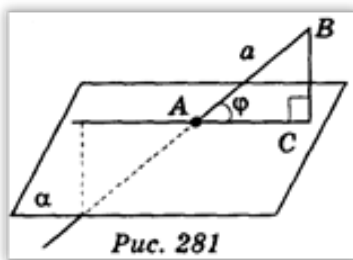
I. Аналіз контрольної роботи

Додаток_1 викладено окремим документом

II. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Кут між прямою і площиною

У курсі геометрії 10 класу ми розглянули випадки розміщення прямої і



площини: 1) пряма лежить у площині; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма перпендикулярна до площини. Залишається дослідити випадок, коли пряма перетинає площину, але не перпендикулярна до неї.

Такі прямі можуть бути нахилені до площини під різними кутами. Що ж розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між прямою і площиною дорівнює 0° . Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90° . У решті випадків кутом між прямою і площиною називають кут між прямою і її проекцією (ортогональною) на площину. На рис. 281 $BC \perp \alpha$, A — точка перетину прямої a з площиною α , тоді кут між прямою a і площиною α дорівнює куту $BAC = \varphi$. Якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Розв'язування задач

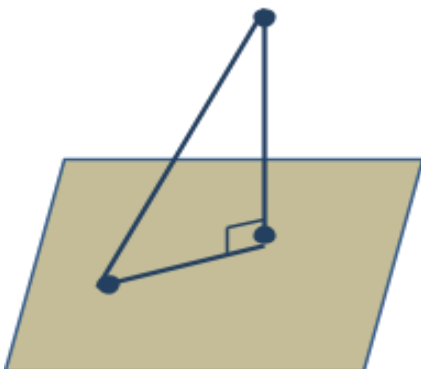
1. **№ 36.2.** Із точки проведено до площини перпендикуляр і похилу, яка утворює з даною площиною кут 50° . Чому дорівнює кут між даною похилою та перпендикуляром?

Розв'язання

Так як $AB \perp \alpha$, то $AB \perp CB$, $CB \in \alpha$.

CB — проекція AC на площину, тоді $\angle ACB$ — кут між площиною і похилою AC , $\angle ACB = 50^\circ$.

Трикутник ACB прямокутний, $\angle ACB + \angle CAB = 90^\circ$, тоді $\angle CAB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.



Відповідь: 40° .

2. Дано зображення куба. Знайдіть кут між площиною ABC і прямою a (рис. 282).

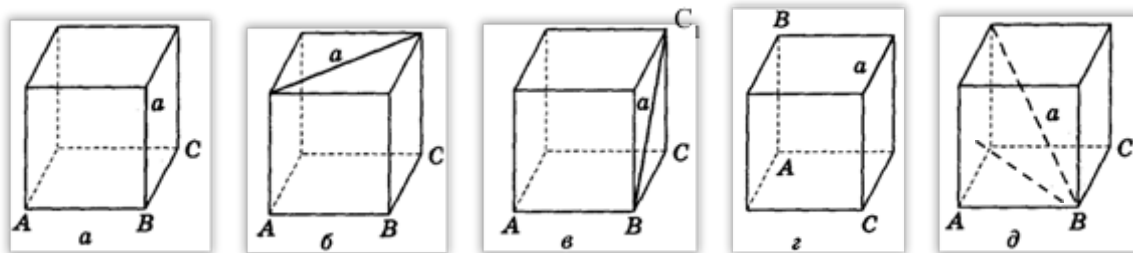


Рис. 282

Розв'язання

а) так як всі грані куба – квадрати, то кут між площиною (ABC) і прямою a дорівнює 90° , $a \perp AB$, $a \perp BC$ за властивістю сторін квадрата.

б) так як протилежні грані квадрата паралельні, а пряма a належить грані, паралельній (ACB), то пряма a паралельна площині (ABC) за означенням.

в) $CC_1 \perp (ABC)$, BC_1 – похила до площини (ABC), отже, BC – проекція AC на (ABC). За властивістю квадрата

$$a = \sqrt{2}BC, \text{ тоді } \sin \angle C_1BC = \frac{BC}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \angle C_1BC = 45^\circ.$$

г) так як протилежні грані квадрата паралельні, а пряма a належить грані, паралельній (ACB), то пряма a паралельна площині (ABC) за означенням. Кут дорівнює 0° .

д) проекцією прямої a на площину (ABC) є діагональ BD нижньої основи ABCD, яка належить площині (ABC). Діагональ нижньої основи дорівнює $AB\sqrt{2}$. Трикутник BDD₁ – прямокутний.

$$\tan \angle D_1BD = \frac{DD_1}{BD} = \frac{AB}{AB\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\angle D_1BD = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь, а) 90° ; б) 0° ; в) 45° ; г) 0° ; д) $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Задача з підручника

Задача. Доведіть, що коли з однієї точки до площини проведено похилі, які утворюють рівні кути з площиною, то проекція даної точки на площину рівновіддалена від основ похилих.

Розв'язання. Нехай MA і MB — похилі, які утворюють із площиною α рівні кути, відрізки OA і OB — проекції цих похилих (рис. 36.4). Доведемо, що $OA = OB$.

Пряма OA є проекцією прямої MA на площину α . Оскільки кут MAO гострий, то він дорівнює куту між прямими OA і MA . Отже, величина кута MAO дорівнює куту між похилою MA та площиною α . Аналогічно можна довести, що величина кута MBO дорівнює куту між похилою MB і площиною α . За умовою $\angle MAO = \angle MBO$.

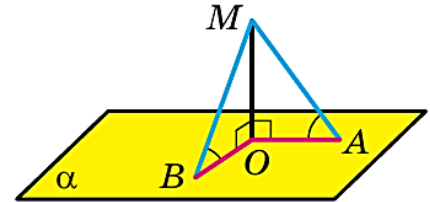


Рис. 36.4

Оскільки $MO \perp \alpha$, то $\angle MOA = \angle MOB = 90^\circ$. Отримуємо, що прямокутні трикутники MOA і MOB є рівними за катетом і протилежним гострим кутом. Звідси $OA = OB$. ◀

III. Домашнє завдання

Опрацювати конспект та виконати завдання в зошиті.

§ 5, п. 36 (кут між площиною і відрізком); № 36.9, № 36.11, № 36.13.

IV. Підведення підсумку уроку

Запитання до класу

1) Дайте означення кута між прямою і площиною.

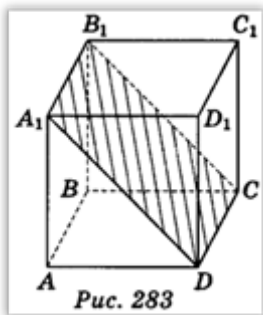


Рис. 283

2) У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено переріз січною площиною, яка проходить через точки A_1 , D , C (рис. 283). Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

- а) площина $A_1 DB_1$ перпендикулярна до прямої AA_1 ;
- б) кут між прямою AD і площиною $A_1 DC$, дорівнює 45° ;
- в) кут між прямою AB і січною площиною дорівнює 0° ;
- г) кут між прямою BC_1 і площиною $A_1 DC$ дорівнює 90°