10 клас

10.1. Розв'яжіть рівняння

$$x^4 + 2x^2 = 99.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 100.$$

Далі маємо

$$(x^2 + 1)^2 = 10^2$$

Отже, $x^2 = -11$ (розв'язків немає) або $x^2 = 9$, тобто $x = \pm 3$.

Відповідь. $x_1 = -3, x_2 = 3$.

10.2. З вершини C прямого кута прямокутного трикутника ABC проведено медіану CM і висоту CH. Знайдіть кути цього трикутника, якщо площа трикутника CMH у 4 рази менша, ніж площа трикутника ABC.

Розв'язання. Для певності вважаємо, що $H \in BM$. Оскільки $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$ і $S_{CMH} = \frac{1}{2} MH \cdot CH$, то $MH = \frac{1}{4} AB$. Тоді

$$BH = BM - MH = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} AB = MH.$$

Тому трикутник CBM рівнобедрений ($CB = CM$), адже – CH його висота. З іншого боку, M – центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Тому $CM = BM$. Отже, трикутник CBM рівносторонній і $\angle CBA = 60^\circ$.

Відповідь. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

10.3. Розв'яжіть нерівність

$$3 \cos cos\,(3x) + 5 \cos cos\,(5x) + 7 \cos cos\,(7x) + \ldots + 89 \cos cos\,(89x) \leq 2024.$$

Розв'язання. Оскільки $\cos cos\, x \leq 1$, то

$$3 \cos cos\,(3x) + 5 \cos cos\,(5x) + \ldots + 89 \cos cos\,(89x) \leq 3 + 5 + \ldots + 89 = \frac{(3+89)44}{2} = 2024.$$

Відповідь. $x \in (-\infty, +\infty)$.

10.4. Знайдіть всі пари натуральних чисел x і y таких, що

$$3xy + x + 6y = 2023.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$3xy + x + 6y + 2 = 2025,$$

Тобто

$$(x + 2)(3y + 1) = 45^2.$$

Натуральне число $3y + 1$ є дільником числа $45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Звідси випливає, що $3y + 1 = 25$. Таким чином, $y = 8$ і $x = 79$.

Відповідь. $x = 79,\ y = 8.$

10.5. На дошці записано числа

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \ldots,\ \sqrt{99}.$$

За один крок дозволяється витерти будь-які два числа a і b, які на той момент записані на дошці, і записати одне з наступних чисел: $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ або $\sqrt{a^2 + b^2}$. Яке найбільше число можна отримати на дошці після застосування 98-ми таких кроків?

Розв'язання. З нерівності Коші між середніми випливає, що $\frac{a+b}{\sqrt{2}} \le \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 \le a^2 + b^2$. Тому з кожним кроком сума квадратів чисел, які записані на дошці, не збільшується. Отже, після застосування 98-ми кроків одержиться число, квадрат якого не перевищує початкової суми квадратів чисел. З іншого боку, якщо на кожному кроці вибирати друге число, то сума квадратів чисел, які записані на дошці, не змінюватиметься і ми, таким чином, отримаємо найбільше число A, для якого

$$A^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 + \ldots + \sqrt{99}^2 = 50 \cdot 99.$$

Відповідь. $\sqrt{50 \cdot 99}$.

11 клас

11.1. Розв'яжіть рівняння

$$x^4 + 2x^2 = 2499.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2500.$$

Далі маємо

$$(x^2 + 1)^2 = 50^2$$

Отже, $x^2 = -51$ (розв'язків немає) або $x^2 = 49$, тобто $x = \pm 7$.

Відповідь. $x_1 = -7, x_2 = 7$.

11.2. Середини сторін опуклого чотирикутника $ABCD$ лежать на одному колі. Відомо, що $AB = CD = 5$см і $BC = 7$см. Знайдіть довжину сторони DA.

Розв'язання. Оскільки середини сторін опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма (його сторони паралельно діагоналям чотирикутника), а паралелограм, вписаний в коло, -- це прямокутник, то діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Нехай O – точка перетину діагоналей. Тоді

$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = BC^2 + DA^2.$$

Відповідь. $DA = 1$см.

11.3. Розв'яжіть нерівність

$$3^{x+1} + 5^{x+1} + 7^{x+1} + \ldots + 89^{x+1} \leq 2024^{x+1}.$$

Розв'язання. Оскільки $3 + 5 + \ldots + 89 = \frac{(3+89)44}{2} = 2024$, то ми можемо записати нерівність у такому вигляді

$$3\cdot 3^x + 5\cdot 5^x + \ldots + 89\cdot 89^x \leq 3\cdot 2024^x + 5\cdot 2024^x + \ldots + 89\cdot 2024^x$$

Тобто

$$3(3^x - 2024^x) + 5(5^x - 2024^x) + \ldots + 89(89^x - 2024^x) \leq 0.$$

Для кожного $k = 3, 5, ..., 89$ вираз $k^x - 2024^x = k^x(1 - \left(\frac{2024}{k}\right)^x)$ строго більший нуля на проміжку $x\in(-\infty, 0)$, і більший або рівний нулеві на проміжку $x\in[0, +\infty)$. Тому значення такого ж знаку набуває і відповідна сума таких виразів.

Відповідь. $x\in[0, +\infty)$.

11.4. Знайдіть всі пари натуральних чисел x і y таких, що

$$5xy + 10x + y = 2023.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$5xy + 10x + y + 2 = 2025,$$

Тобто

$$(5x + 1)(y + 2) = 45^2.$$

Натуральне число $5x + 1$ є дільником числа $45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Звідси випливає, що $5x + 1 = 81$. Таким чином, $x = 16$ і $y = 23$.

Відповідь. $x = 16, y = 238$.

1. На дошці записано числа

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{99}.$$

За один крок дозволяється витерти будь-які k чисел $a_1, a_2, ..., a_k$, які на той момент записані на дошці, і записати одне з наступних чисел: $\frac{a_1+a_2+...+a_k}{\sqrt{k}}$ або $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2}$. Яке найбільше число можна отримати на дошці?

Розв'язання. З нерівності Коші між середніми випливає, що $\frac{a_1+a_2+...+a_k}{\sqrt{k}} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2}$, тобто $(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{\sqrt{k}})^2 \le a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2$. Тому з кожним кроком сума квадратів чисел, які записані на дошці, не збільшується. Отже, після кожного застосування такого кроку обов'язково одержиться число, квадрат якого не перевищує початкової суми квадратів чисел. З іншого боку, якщо на кожному кроці вибирати друге число, то сума квадратів чисел, які записані на дошці, не змінюватиметься і ми, застосувавши, наприклад, друге число 98 разів при $k = 2$, отримаємо найбільше число A, для якого

$$A^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 + ... + \sqrt{99}^2 = 50\cdot 99.$$

Відповідь. $\sqrt{50\cdot 99}$.