MPSI : 2 et 5.
Lycée Moulay Youssef **Rabat 2008-2009**

MPSI
Prépa G.S. High Tech

Devoir commun surveillé n°6
Lundi 9 Mars 2009
Durée 4h

Exercice2.

1/ Montrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N}^{\bullet};\ \sum_{k=0}^{n} C_{k+p-1}^{p-1} = C_{n+p}^{p}$.

2/ Montrer que le nombre de solutions de l'équation (E) : $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$ d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ est C_{n+p-1}^{p-1}.

3/ Pour n un entier naturel non nul, on note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

3.a/ Quel est le nombre d'applications de E_n vers E_p ?

3.b/ On note $F_{n,p}$ l'ensemble des applications de E_n vers E_p croissantes et $S_{n,p}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Montrer que l'application φ définie de $F_{n,p}$ vers $S_{n,p}$ par :

$$\forall f \in F_{n,p}\ ;\ \varphi(f) = \left(card(f^{-1}(\{1\})), card(f^{-1}(\{2\})), \ldots, card(f^{-1}(\{p\}))\right)$$

est bijective. En déduire le nombre d'applications de E_n vers E_p croissantes

Problème1.

On désigne par E l'ensemble des suites réelles.

Pour $u \in E$, on note $u(n)$ au lieu de u_n le terme général d'indice n de la suite u.

On rappelle que $(E,+)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est la suite nulle notée 0.

Pour $u, v \in E$, on appelle convolé de la suite u par la suite v, la suite $u * v \in E$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u * v)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k)$$

La loi de composition interne $*$ sur E ainsi définie est appelée le produit de convolution des suites réelles.

1.1/ Montrer que $*$ est commutative est associative.

1.2/ On note e la suite réelle définie par : $e(0)=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, e(n)=0$. Montrer que e est élément neutre pour $*$.

1.3/ Montrer que $*$ est distributive par rapport à +.

1.4/ Que dire de la structure de $(E,+,*)$?

2.1/ Soit $r \in \mathbb{R}^*$ et u la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u(n)=r^n$ Montrer que u est inversible dans $(E,+,*)$ et déterminer son inverse.

2.2/ on désigne par F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, c'est-à-dire $u \in F$ si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u(n)=0$.

Montrer que F est un sous anneau de $(E,+,*)$.

2.3/ Soit $f : E \to E$ une application définie par : $\forall u \in E, f(u)=v \in E$ avec v est donnée par :

$$\forall n, v(n)=(-1)^n u(n)$$

Montrer que f est un automorphisme involutif de l'anneau $(E,+,*)$.

3/ On se propose maintenant de déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,*)$.

3.1/ Soit u un élément inversible de l'anneau $(E,+,*)$. Montrer que $u(0) \neq 0$.

3.2/ Inversement soit u un élément de E tel que $u(0) \neq 0$, montrer que u est inversible.

4/ Etude de l'intégrité de l'anneau $(E,+,*)$. Soient $u, v \in E$ tels que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

On pose $p=\min\{n \in \mathbb{N} : u(n) \neq 0\}$ et $q=\min\{n \in \mathbb{N} : v(n) \neq 0\}$.

4.1/ Justifier l'existence de p et q.

4.2/ Montrer que $(u * v)(p+q) \neq 0$ puis conclure.

Problème2.

Partie1. Autour de la moyenne de Cézaro.

Pour $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ avec $n \geq 1$.

1.a/ Montrer que si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $(v_n)_{n\geq 1}$ converge aussi vers l.

1.b/ Montrer que si (u_n) tend vers $+\infty$ alors $(v_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$. En déduire que si (u_n) tend vers $-\infty$ alors $(v_n)_{n\geq 1}$ tend vers $-\infty$.

2/ Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que si (w_n) tend vers une limite $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ alors : $\lim \frac{u_n}{n} = \alpha$

3.a/ Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs, montrer que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta$ alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \beta$.

3.b/ En déduire la limite de la suite de terme général : $\frac{1}{n}\sqrt[n]{1.3.5...(2n-1)}$

4.a/ Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\lim \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$ et soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\lim u_n = a \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = a$.

4.b/ En déduire que si $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont deux suite réelles telles que : $\forall n \geq 1, y_n > 0$ avec $\lim \sum_{k=1}^{n} y_k = +\infty$ et $x_n \sim y_n$ alors $\sum_{k=1}^{n} x_k \sim \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Partie2.

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0. On suppose qu'au voisinage de 0, $f(x) = x - ax^{\beta} + o(x^{\beta})$ avec $a > 0$ et $\beta > 1$.

On considère la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$

5.a/ Montrer qu'il existe un réel $h > 0$ tel que $f(]0,h[) \subset]0,h[$ et $\forall x \in]0,h[\,; f(x) < x$. En déduire que pour $u_0 \in]0,h[$, la suite (u_n) est bien définie. On suppose désormais $u_0 \in]0,h[$.

5.b/ Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

5.b/ Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, écrire le développement limité de $(f(x))^{\gamma}$ au voisinage de 0 à l'ordre $\gamma + \beta - 1$. En déduire une valeur de γ pour laquelle la suite de terme général $u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}^*$.

5.c/ En déduire un équivalent de u_n.

6/ Application. Pour les fonctions suivantes, donner un intervalle maximal $J =]0,h[\subset \mathbb{R}^+$ tel que pour $u_0 \in J$ la suite (u_n) est bien définie et donner un équivalent de u_n.

$$f_1(x) = xe^{-x} \quad , \quad f_2(x) = \sin x$$

Partie3.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

7/ Montrer que (u_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$. On pose par la suite $v_n = e^{u_n}$.

8.a/ Montrer que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ tends vers 1.

8.b/ En déduire un équivalent de v_n puis le premier terme du développement asymptotique de u_n .

9.a/ Montrer que : $v_{n+1} - v_n - 1 = \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{2n}\right)$.

9.b/ En déduire les deux premiers termes du développement asymptotique de v_n .

9.c/ Déterminer alors les deux premiers termes du développement asymptotique de u_n .