

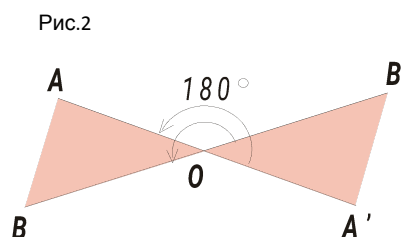
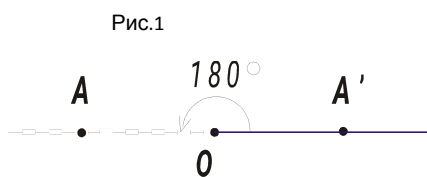
История развития теории движений.

Первым, кто начал доказывать некоторые геометрические предложения, считается древнегреческий математик **Фалес Милетский** (625-547 г. до н.э.). Именно благодаря Фалесу геометрия начала превращаться из свода практических правил в подлинную науку. До Фалеса доказательств просто не существовало!

Каким же образом проводил Фалес свои доказательства? Для этой цели он использовал движения.

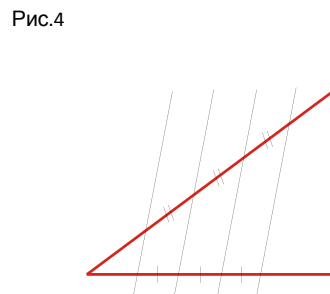
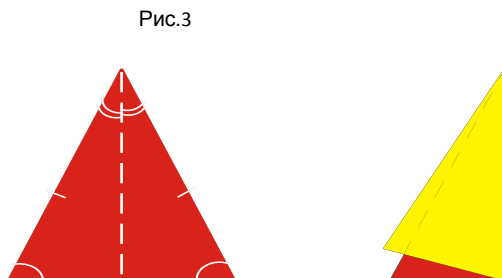
Движение – это преобразования фигур, при котором сохраняются расстояния между точками. Если две фигуры точно совместить друг с другом посредством движения, то эти фигуры одинаковы, равны.

Именно таким путём Фалес доказал ряд первых теорем геометрии. Если плоскость повернуть как твёрдое целое вокруг некоторой точки O на 180° , луч OA перейдёт в его продолжение OA' . При таком *повороте* (его ещё называют *центральной симметрией* с центром O) каждая точка A перемещается в такую точку A' , что O является серединой отрезка AA' (рис.1).



Пусть O – общая вершина вертикальных углов AOB и $A'OB'$. Но тогда ясно, что при повороте на 180° стороны одного из двух вертикальных углов как раз перейдут в стороны другого, т.е. эти два угла совместятся. Значит, вертикальные углы равны (рис.2).

Доказывая равенство углов при основании равнобедренного треугольника, Фалес воспользовался *осевой симметрией*: две половинки равнобедренного треугольника он совместил перегибанием чертежа по биссектрисе угла при вершине (рис.3). Тем же способом Фалес доказал, что диаметр делит круг пополам.



Применял Фалес и ещё одно движение – *параллельный перенос*, при котором все точки фигуры смещаются в определённом направлении на одно и то же расстояние. С его помощью он доказал теорему, которая сейчас носит его имя:

если на одной стороне угла отложить равные отрезки и провести через концы этих отрезков параллельные прямые до пересечения со второй стороной угла, то на другой стороне угла также получатся равные отрезки (рис.4).

Во времена античной истории идеей движения пользовался и знаменитый **Евклид**, автор «Начал» – книги, пережившей более двух тысячелетий. Евклид был современником Птолемея I, правившего в Египте, Сирии и Македонии в 305-283 г. до н.э.

Движения в неявном виде присутствовали, например, в рассуждениях Евклида при доказательстве признаков равенства треугольников: «Наложим один треугольник на другой таким-то образом». По Евклиду, две фигуры называются равными, если они могут быть «совмещены» всеми своими точками, т.е. перемещая одну фигуру как твёрдое целое, можно точно наложить её на вторую фигуру. Для Евклида движение не было ещё математическим понятием. Впервые изложенная им в «Началах» система аксиом стала основой геометрической теории, получившей название **Евклидовой геометрии**.

В Новое время продолжается развитие математических дисциплин. В XI веке создаётся аналитическая геометрия. Профессор математики Болонского университета **Бонавентура Кавальери** (1598-1647) издаёт сочинение «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного». Согласно Кавальери, любую плоскую фигуру можно рассматривать как совокупность параллельных линий или «следов», которые оставляет линия, передвигаясь параллельно самой себе. Аналогично даётся представление о телах: они образуются при движении плоскостей.

Дальнейшее развитие теории движений связывают с именем французского математика и историка науки **Мишеля Шаля** (1793-1880). В 1837 г. он выпускает труд «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов». В процессе собственных геометрических исследований Шаль доказывает важнейшую теорему:

всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом, всякое меняющее ориентацию движение плоскости является либо осевой симметрией, либо скользящей симметрией.

Доказательство теоремы Шаля полностью проводится в п.8 данного реферата.

Важным обогащением, которым геометрия обязана XIX веку, является создание теории геометрических преобразований, в частности, математической теории движений (перемещений). К этому времени назрела необходимость дать классификацию всех существующих геометрических систем. Такую задачу решил немецкий математик **Кристиан Феликс Клейн** (1849-1925).

В 1872 г., вступая в должность профессора Эрлангенского университета, Клейн прочитал лекцию «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований». Выдвинутая им идея переосмысления всей геометрии на основе теории движений получила название «**Эрлангенская программа**».

По Клейну, для построения той или иной геометрии нужно задать множество элементов и группу преобразований. Задача геометрии состоит в изучении тех отношений между элементами, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях данной группы. Например, геометрия Евклида изучает те свойства фигур, которые остаются неизменными при движении. Иначе говоря, если одна фигура получается из другой движением (такие фигуры называются конгруэнтными), то у этих фигур одинаковые геометрические свойства.

В этом смысле движения составляют основу геометрии, а пять **аксиом конгруэнтности** выделены самостоятельной группой в системе аксиом современной геометрии. Эту полную и достаточно строгую систему аксиом, подытожив все предыдущие исследования, предложил немецкий математик **Давид Гильберт** (1862-1943). Его система из двадцати аксиом, разделённых на пять групп, была впервые опубликована в 1899 г в книге «**Основания геометрии**».

В 1909 г. немецкий математик **Фридрих Шур** (1856-1932), следуя идеям Фалеса и Клейна, разработал другую систему аксиом геометрии – основанную на рассмотрении движений. В его системе, в частности, вместо группы аксиом конгруэнтности Гильберта предлагается группа из трёх **аксиом движения**.

Виды и некоторые важные свойства движений подробно рассматриваются в данном реферате, коротко же их можно выразить следующим образом: **движения образуют группу, которая задаёт и определяет евклидову геометрию**.

Определение и свойства движений.

При смещении каждой точки данной фигуры каким-либо образом получается новая фигура. Говорят, что эта фигура получена **преобразованием** из данной. Преобразование одной фигуры в другую называется движением, если оно сохраняет расстояния между точками, т.е. переводит любые две точки X и Y одной фигуры в точки X' и Y' другой фигуры так, что $XY = X'Y'$.

Определение. Преобразование фигуры, которое сохраняет расстояние между точками, называется движением этой фигуры.

! Замечание: понятие движения в геометрии связано с обычным представлением о перемещении. Но если, говоря о перемещении, мы представляем себе непрерывный процесс, то в геометрии для нас будут иметь значение только начальное и конечное (образ) положения фигуры. Этим геометрический подход отличается от физического.

При движении разным точкам соответствуют разные образы, причём каждой точке X одной фигуры ставится в соответствие единственная точка X' другой фигуры. Такое преобразование фигур называют **взаимно однозначным или биективным**. Применительно к движениям вместо термина «равенство» фигур (прямых, отрезков, плоскостей и т.д.) употребляется термин «**конгруэнтность**» и используется символ $\cong$. Для обозначения принадлежности используется символ $\in$. С учётом сказанного можно дать более корректное определение движению:

Движение – это биективное преобразование φ плоскости π , при котором для любых различных точек $X, Y \in \pi$ выполнено соотношение $XY \cong \varphi(X)\varphi(Y)$.

Результат последовательного выполнения двух движений называется **композицией**. Если сначала выполняется движение φ , а следом за ним движение ψ , то композиция этих движений обозначается через $\psi \circ \varphi$.

Самым простым примером движения является тождественное отображение (принято обозначать – ε), при котором каждой точке X , принадлежащей плоскости, сопоставляется сама эта точка, т.е. $\varepsilon(X) = X$.

Рассмотрим несколько важных свойств движений.

Свойство 1.

Лемма 2.1. Композиция $\varphi \circ \psi$ двух движений ψ, φ является движением.

Доказательство.

Пусть фигура F переводится движением ψ в фигуру F' , а фигура F' переводится движением φ в фигуру F'' . Пусть при первом движении точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F' , а при втором движении точка X' фигуры F' переходит в точку X'' фигуры F'' . Тогда преобразование фигуры F в фигуру F'' , при котором произвольная точка X фигуры F переходит в точку X'' фигуры F'' , сохраняет расстояние между точками, а значит, также является движением.

Заметим, что запись композиции всегда начинается с последнего движения, т.к. результатом композиции является конечный образ – он и ставится в соответствие исходному:

$$X'' = \psi(X') = \psi(\varphi(X)) = \psi \circ \varphi(X)$$

Свойство 2.

Лемма 2.2. Если φ – движение, то преобразование φ^{-1} также является движением.

Доказательство.

Пусть преобразование фигуры F в фигуру F' переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F' . Пусть произвольная точка X фигуры F при этом преобразовании переходит в точку X' фигуры F' .

Преобразование фигуры F' в фигуру F , при котором точка X' переходит в точку X , называется **преобразованием, обратным данному**. Для каждого движения φ можно определить обратное ему движение, которое обозначается φ^{-1} .

Рассуждая аналогично доказательству свойства 1, можно убедиться, что преобразование, обратное движению, также является движением.

Очевидно, что преобразование φ^{-1} удовлетворяет равенствам:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \varepsilon, \text{ где } \varepsilon - \text{тождественное отображение.}$$

Свойство 3 (ассоциативность композиций).

Лемма 2.3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – произвольные движения. Тогда $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$.

Тот факт, что композиция движений обладает свойством ассоциативности, позволяет определить степень φ с натуральным показателем n .

Положим $\varphi^1 = \varphi$ и $\varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi$, если $n \geq 1$. Таким образом, движение φ^n получается путём n -кратного последовательного применения движения φ .

Свойство 4 (сохранение прямолинейности).

Теорема 2.1. Точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в точки, лежащие на одной прямой, и сохраняется порядок их взаимного

расположения.

Это значит, что если точки A, B, C , лежащие на одной прямой (такие точки называют **коллинеарными**), переходят в точки A_1, B_1, C_1 , то эти точки также лежат на прямой; если точка B лежит между точками A и C , то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1 .

Доказательство.

Пусть точка B прямой AC лежит между точками A и C . Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой, то они являются вершинами некоторого треугольника $A_1B_1C_1$. Поэтому $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$.

По определению движения следует, что $AC < AB + BC$.

Однако по свойству измерения отрезков $AC = AB + BC$.

Мы пришли к противоречию. Значит, точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1 .

Допустим, что точка A_1 лежит между точками B_1 и C_1 . Тогда $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$, и, следовательно, $AB + AC = BC$. Но это противоречит равенству $AB + BC = AC$.

Таким образом, точка A_1 не лежит между точками B_1 и C_1 .

Аналогично доказывается, что точка C_1 не может лежать между точками A_1 и B_1 .

Т.к. из трёх точек A_1, B_1, C_1 одна лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только B_1 . Теорема доказана полностью.

Следствие. При движении прямая отображается на прямую, луч – на луч, отрезок – на отрезок, а треугольник – на равный ему треугольник.

Если через X обозначить множество точек плоскости, а через $\varphi(X)$ – образ множества X при движении φ , т.е. множество всех точек вида $\varphi(x)$, где $x \in X$, то можно дать более корректную формулировку данного свойства:

Пусть φ – движение, A, B, C – три различные коллинеарные точки.

Тогда точки $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ также коллинеарны.

Если l – прямая, то $\varphi(l)$ также прямая.

Если множество X является лучом (отрезком, полуплоскостью), то множество $\varphi(X)$ также является лучом (отрезком, полуплоскостью).

Свойство 5.

Теорема 2.2. При движении сохраняются углы между лучами.

Доказательство.

Пусть AB и AC – два луча, исходящие, из точки A , не лежащие на одной прямой. При движении эти лучи переходят в некоторые полупрямые (лучи) A_1B_1 и A_1C_1 .

Т.к. движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников (если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны). Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$, что и требовалось доказать.

Можно дать более корректную формулировку данного свойства:

Образом произвольного угла при движении является угол, конгруэнтный данному.

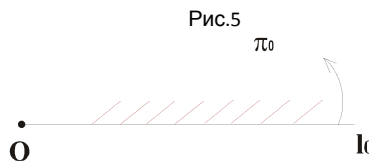
Свойство 6.

Предложение 2.1. Всякое движение сохраняет сонаправленность лучей и одинаковую ориентированность флагов.

Прежде, чем приступить к доказательству, напомним, что лучи l_A и l_B называются **сонаправленными** (одинаково ориентированными, обозначение: $l_A \uparrow\uparrow l_B$), если один из них содержится в другом, или если они совмещаются параллельным переносом. Теперь необходимо определить понятие **флага**.

Определение. Флаг $F = (\pi, l_0)$ – это объединение полуплоскости π и луча l_0 .

Точка O – начало флага, луч l_0 с началом в точке O – древко флага, π – полуплоскость с границей l (рис.5).



Доказательство.

Пусть φ – произвольное движение, $l_A \uparrow\uparrow l_B$ – сонаправленные лучи с началами в точках A и B соответственно. Введём обозначения:

$l_{A1} = \varphi(l_A), A_1 = \varphi(A), l_{B1} = \varphi(l_B), B_1 = \varphi(B)$.

Если лучи l_A и l_B лежат на одной прямой, то в силу сонаправленности один из них содержится в другом. Считая, что $l_A \subseteq l_B$, получаем $\varphi(l_A) \subseteq \varphi(l_B)$, т.е. $l_{A1} \uparrow\uparrow l_{B1}$ (символом $\subseteq$ обозначается включение или равенство подмножества элементов множеству элементов).

Если же l_A, l_B лежат на разных прямых, то пусть $n = (AB)$. Тогда существует такая полуплоскость π_n , что $l_A, l_B \subset \pi_n$. Отсюда $\varphi(l_A), \varphi(l_B) \subset \varphi(\pi_n)$. Поскольку $\varphi(\pi_n)$ – полуплоскость, причем ее граница содержит точки A_1 и B_1 , мы опять получаем, что l_{A1}, l_{B1} сонаправлены.

Применим теперь движение φ к одинаково ориентированным флагам $F = (\pi, l_A), G = (\pi, l_B)$.

Рассмотрим сначала случай, когда точки A и B совпадают. Если прямые l и m различны, то одинаковая ориентированность флагов означает, что либо (1) $l_A \subset \pi_m, m_A \subset \pi'_l$, либо (2) $l_A \subset \pi'_m, m_A \subset \pi_l$. Без ограничения общности можно считать, что выполняется условие (1). Тогда $\varphi(l_A) \subset \varphi(\pi_m), \varphi(m_A) \subset \varphi(\pi'_l)$. Отсюда вытекает одинаковая ориентированность флагов $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$. Если же прямые l, m совпадают, то либо $F = G$, либо $F = G'$. Отсюда следует, что флаги $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$ одинаково ориентированные.

Пусть теперь точки A и B различны. Обозначим через n прямую (AB) . Понятно, что найдутся сонаправленные лучи n_A и n_B и полуплоскость π_n такие, что флаг $F_1 = (\pi_n, n_A)$ сонаправлен с F , а флаг $G_1 = (\pi_n, n_B)$ сонаправлен с G . Значит $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$ одинаково ориентированные. Теорема доказана.

Конгруэнтность фигур.

Определение. Фигуры X и Y называются конгруэнтными ($X \cong Y$), если существует такое движение φ , что $Y = \varphi(X)$.

Например, конгруэнтными являются любые лучи, любые прямые, любые полуплоскости, любые окружности одинакового радиуса.

Пусть X, Y, Z – произвольные фигуры. Тогда выполнены соотношения:

- 1) $X \cong X$;
- 2) если $X \cong Y$, то $Y \cong X$;

3) если $X \equiv Y$ и $Y \equiv Z$, то $X \equiv Z$.

Эти соотношения и определяют **свойства конгруэнтных фигур**:

1) **рефлексивность** - каждая фигура конгруэнтна самой себе, поскольку тождественное преобразование ε , оставляющее все точки на месте, переводит фигуру саму в себя;

2) **симметричность** - если фигура M конгруэнтна фигуре N , то и фигура N конгруэнтна фигуре M . В самом деле, если M переводится в N движением φ , то обратное движение φ^{-1} переводит N в M .

3) **транзитивность** - если фигура M конгруэнтна фигуре N , а фигура N конгруэнтна фигуре P , то и фигура M конгруэнтна фигуре P .

Евклид данное свойство формулировал иначе: "Две фигуры, равные третьей, равны между собой". Действительно, так как фигура M конгруэнтна фигуре N , существует движение φ , переводящее M в N . Поскольку N конгруэнтна фигуре P , есть движение g , переводящее N в P . Но тогда композиция $\varphi \circ g$ (тоже движение) переводит M в P , а значит, фигура M конгруэнтна фигуре P .

При переходе фигуры к конгруэнтной ей (при движении), все геометрические свойства фигуры сохраняются или, как говорят, они **инвариантны** (неизменны).

Виды движений.

Если на плоскости фигура F' конгруэнтна фигуре F , то существует некоторое движение, переводящее F в F' . Оказывается, что на плоскости существует всего лишь четыре вида движений:

- ◆ Параллельный перенос;
- ◆ Симметрия относительно прямой (осевая или зеркальная симметрия);
- ◆ Поворот вокруг точки;
- ◆ Скользящая симметрия (композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси симметрии).

Одним из этих движений и переводится F в F' .

Параллельный перенос.

Реальным примером фигур, полученных друг из друга параллельным переносом, являются одинаковые окна на фасаде дома.

Начертив на плане одно из окон, можно затем получить любое другое окно, сместив все точки первого в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Это свойство и определяет параллельный перенос.

Определение. Параллельным переносом называется такое преобразование фигуры,

при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Подробнее: если при параллельном переносе точкам X и Y сопоставлены точки X' и Y' , то



направленные отрезки XX' и YY' равны и одинаково направлены, так, что $XX' = YY'$. Равные направленные отрезки представляют один и тот же вектор. Поэтому можно сказать так:

параллельный перенос – это преобразование τ , при котором все точки фигуры перемещаются на один и тот же вектор – вектор переноса.



Обозначение: $\tau_{\vec{AB}}$, где $\vec{AB}$ – вектор переноса.

$\vec{AB}$

Теорема 4.1. Параллельный перенос является движением.

Доказательство.

Пусть при параллельном переносе точки X и Y перешли в точки X' и Y' . Тогда, как



следует из определения переноса, выполняется равенство $XX' = YY'$.



Согласно признаку равенства векторов из равенства $XX' = YY'$ следует равенство



$XY = X'Y'$. Поэтому $X'Y' = XY$, откуда следует, что параллельный перенос – движение, что и требовалось доказать.

Частным случаем параллельного переноса можно считать тождественное отображение (ε). Ясно, что при тождественном отображении происходит параллельный перенос на нулевой вектор.

Поворот.

Пусть дана точка O . На окружности с центром O можно указать одно из двух направлений обхода - по часовой стрелке или против неё. Этим задаются также два направления отсчёта углов от идущих из точки O лучей - по часовой стрелке или против неё.

Поворот фигуры F вокруг центра O на данный угол φ в данном направлении определяется так: каждой точке X фигуры F сопоставляется такая точка X' , что, во-первых, $OX' = OX$, во-вторых, $\angle XOX' = \varphi$, и, в-третьих, луч OX' откладывается от луча OX в заданном направлении.

Определение. Поворотом плоскости ρ вокруг данной точки O называется такое движение, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол α в одном и том же направлении.

Обозначение: ρ^α_O

Теорема 4.2. Поворот является движением.

Доказательство.

Пусть O - центр поворота, α - угол поворота по часовой стрелке (случай поворота против часовой стрелки рассматривается аналогично). Допустим, что точки M и N перешли при этом повороте в точки M' и N' . Треугольники OMN и $OM'N'$ равны по двум сторонам и углу между ними: $OM = OM'$, $ON = ON'$ и $\angle MON = \angle M'ON'$.

Из равенства этих треугольников следует, что $MN = M'N'$, как соответственные стороны, т.е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M' и N' .

Если точки M , O и N лежат на одной прямой, то отрезки MN и $M'N'$ будут либо суммой, либо разностью равных отрезков OM , ON и OM' , ON' . Поэтому и в этом случае $MN = M'N'$, а значит – поворот является движением, что и требовалось доказать.

Особый случай представляет поворот на 180° .

Если O – центр такого поворота, то, чтобы построить точку, соответствующую точке X , достаточно продолжить отрезок XO за точку O на отрезок $OX' = OX$. Точки X и X' в этом случае называют симметричными относительно точки O , а само преобразование – *центральной симметрией с центром в точке O (σ_O)*.

Т.к. симметричность точек X и X' относительно некоторой точки O взаимна, то и *симметричность фигур относительно точки взаимна*. А именно, если фигура F перешла при симметрии с центром O в фигуру F' , то и F' при этой симметрии перешла в F . В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно точки O . Тогда говорят, что фигура F симметрична относительно точки O , и что точка O является центром симметрии фигуры F . Например, центр круга – это его центр симметрии, точка пересечения диагоналей параллелограмма – его центр симметрии.

Другой частный случай поворота – тождественное отображение (ε). Ясно, что тождественное отображение можно рассматривать как поворот вокруг произвольной точки на угол 0° или на угол 360° .

Симметрия относительно прямой.

Пусть l – фиксированная прямая. Возьмём произвольную точку X и опустим перпендикуляр AX на прямую l . На продолжении перпендикуляра за точку A отложим отрезок AX' , равный отрезку AX . Точка X' называется симметричной точке X относительно прямой g . Если точка X лежит на прямой l , то симметричная ей точка есть сама точка X . Очевидно, что точка, симметричная точке X' , есть точка X .

Определение. Преобразование σ фигуры F в фигуру F' , при котором каждая её точка X переходит в точку X' , симметричную относительно данной прямой l , называется преобразованием симметрии относительно прямой l . При этом фигуры F и F' называются симметричными относительно прямой l .

Обозначение: σ_l

Если преобразование симметрии относительно прямой l переводит фигуру F в себя, то эта фигура называется симметричной относительно прямой l , а прямая l называется *осью симметрии* фигуры.

Например, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника. Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются осями симметрии ромба.

Симметрию относительно прямой часто также называют *отражением в прямой, осевой* или *зеркальной симметрией*.

Теорема 4.3.1. Преобразование симметрии относительно прямой является движением.

Доказательство.

Примем данную прямую u за ось декартовой системы координат (рис.6). Пусть произвольная точка $A(x; y)$ фигуры F переходит в точку $A'(x'; y')$ фигуры F' . Из определения симметрии относительно прямой следует, что у точек A и A' равные ординаты, а абсциссы отличаются только знаком: $x' = -x$.

Далее возьмём две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Они перейдут в точки $A'(-x_1; y_1)$ и $B'(-x_2; y_2)$.

Имеем: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$; $A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Отсюда видно, что $AB = A'B'$. А это значит, что преобразование симметрии относительно прямой есть движение, что и требовалось доказать.

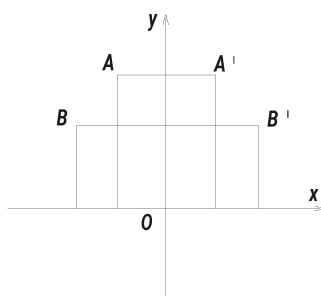


Рис.6

Теорема 4.3.2. Движение φ является осевой симметрией с осью l тогда и только тогда, когда множество всех его неподвижных точек совпадает с l .

Доказательство.

Пусть $\varphi = \sigma_l$. Из определения осевой симметрии сразу следует, что l – множество её неподвижных точек. Проверим обратное утверждение: пусть прямая l – множество неподвижных точек движения φ . Образ произвольной точки X при движении φ : $X' = \varphi(X)$. Если $X \in l$, то $X' = X$. Если же $X \notin l$, то точка X не является неподвижной, поэтому $X' \neq X$. Т.к. $X' = \varphi(X)$, прямая l равноудалена от точек X' и X , т.е. является серединным перпендикуляром к отрезку $X'X$. Таким образом, для любой точки X выполнено равенство: $\varphi(X) = \sigma_l(X)$, т.е. $\varphi = \sigma_l$.

Скольльзящая симметрия.

Заметим, что выделение скольльзящей симметрии в отдельный вид движения не совсем корректно, т.к. она является результатом последовательного выполнения осевой симметрии и параллельного переноса. Однако её свойства представляют определённый интерес.

Определение. Композиция движений $\tau \circ \sigma_l$, где σ_l – симметрия относительно прямой l , а τ – параллельный перенос вдоль прямой l , не являющийся тождественным отображением, называется скольльзящей симметрией с осью l .

Скольльзящая симметрия с осью l обладает двумя свойствами, которые её полностью характеризуют:

- она не имеет неподвижных точек;
- прямая l является её неподвижной прямой.

Теорема. Движение φ является скольльзящей симметрией с осью l тогда и только тогда, когда оно не имеет неподвижных точек, и l – его единственная неподвижная прямая.

Доказательство.

Пусть φ имеет единственную неподвижную прямую l и не имеет неподвижных точек. Возьмём на прямой l произвольную точку A и рассмотрим точки $B = \varphi(A)$, $C = \varphi(B)$. Ясно, что $B, C \in l$. Кроме того, $C \neq A$ (в противном случае середина сегмента AB была бы неподвижной точкой движения φ). Отсюда следует, что B – середина сегмента AC .

Поэтому $\tau_{BA}(B) = A$, а $\tau_{BA}(C) = B$.

BA

BA

Используя эти равенства, легко проверить, что точки A, B являются неподвижными точками композиции $\tau_{BA} \circ \varphi$. Поэтому множество всех неподвижных точек движения $\tau_{BA} \circ \varphi$

BA

BA

содержит прямую $(AB) = l$.

Но тогда $\tau_{BA} \circ \varphi$ есть либо тождественное отображение, либо зеркальная симметрия σ_l .

BA

Равенство $\tau_{BA} \circ \varphi = \varepsilon$ невозможно, ибо из него следует $\varphi = \tau_{BA}$. Но φ имеет неподвижную

BA

BA

прямую, а параллельный перенос – бесконечно много таких прямых.

Таким образом, $\tau_{BA} \circ \varphi = \sigma_l$, откуда $\varphi = \tau_{BA} \circ \sigma_l$.

BA

BA

Исследование особых свойств осевой симметрии.

Осевая симметрия занимает особое место среди движений – с её помощью можно получить все известные нам движения.

Чтобы выяснить, какое движение получается в результате композиции двух осевых симметрий с различными осями l и m , необходимо исследовать два возможных случая:

- 1) прямые l и m параллельны;
- 2) прямые l и m пересекаются.

Исследование 5.1.

Пусть d – расстояние между параллельными прямыми l и m .

Введём систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой l , а прямая m имела уравнение $y = d$ (рис.7).

Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$.

При симметрии относительно прямой l точка M перейдёт в точку $N(x; -y)$. Точка N , в свою очередь, при симметрии относительно прямой m перейдёт в точку M_1 , что прямая m окажется серединным перпендикуляром к отрезку NM_1 . Следовательно, середина отрезка NM_1 должна иметь координаты $(x; d)$, а значит, сама точка M_1 – координаты $(x; y+2d)$.

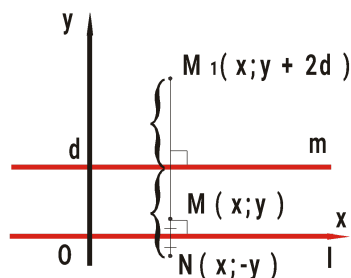


Рис.7

Итак, произвольная точка $M(x; y)$ перешла в точку $M_1(x; y+2d)$, т.е. в такую точку M_1 ,

что $MM_1 = a\{0; 2d\}$. Это означает, что

результатом композиции двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельный перенос на вектор, перпендикулярный к этим осям, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями.

Очевидно, что частным случаем композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, когда оси совпадают, является тождественное отображение (ε).

Исследование 5.2.

Пусть O – точка пересечения прямых l и m . Выберем на этих прямых точки A и B так, чтобы угол не был тупым (рис.8). Поскольку при каждой из симметрий точка O остаётся на месте (является неподвижной), то она остаётся неподвижной и в результате композиции этих симметрий.

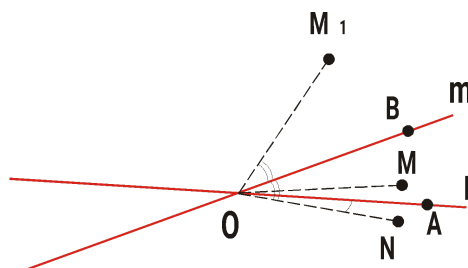


Рис.8

Возьмём теперь произвольную точку M , отличную от O . Допустим, что она лежит внутри угла AOB (остальные случаи рассматриваются аналогично).

При симметрии относительно прямой l точка M перейдёт в такую точку N , что $ON = OM$ и $\angle AON = \angle AOM$. Точка N , в свою очередь, при симметрии относительно прямой m перейдёт в такую точку M_1 , что $OM_1 = ON$ и $\angle BOM_1 = \angle BON = \angle AOB + \angle AON = \angle AOB + \angle AOM$.

Поэтому $\angle AOM_1 = \angle BON + \angle AOB = 2\angle AOB + \angle AON + \angle AOM$, а значит,

$$\angle M_1OM = 2\angle AOB.$$

Итак, точка O осталась на месте, а произвольная точка M перешла в такую точку M_1 , что $OM_1 = OM$ и $\angle M_1OM = 2\angle AOB$. Кроме того, направление поворота вокруг точки O от OM к OM_1 такое же, как от OA к OB (на рис. против часовой стрелки). Это означает, что

результатом композиции двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворот вокруг точки пересечения осей на угол, вдвое больший угла между осями.

Очевидно, что частным случаем композиции двух осевых симметрий с пересекающимися в точке O под углом 90° осями является поворот на 180° , т.е. центральная симметрия с центром в точке O .

Из рассмотренных случаев вытекает важное свойство осевой симметрии:

осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию.

Поскольку и поворот, и параллельный перенос представляют собой результат композиции двух осевых симметрий, то каждое из этих движений сохраняет не только величину угла, но и его ориентацию.

Исследование возможности существования других видов движений.

В п.4 данного реферата были рассмотрены три вида движений: параллельный перенос, поворот и осевая симметрия (скользящая симметрия не включена в этот список, поскольку представляет собой композицию движений; также напомним, что центральная симметрия и тождественное отображение являются частными случаями основных движений).

Возникает вопрос: а существуют ли какие-то другие движения, отличные от перечисленных? Важной характеристикой движения плоскости является множество его неподвижных точек. Оно устроено просто, и могут представиться лишь следующие четыре возможных случая:

- 1) движение оставляет неподвижными три точки плоскости;
- 2) движение оставляет неподвижными две точки плоскости;
- 3) движение оставляет неподвижной одну точку плоскости;
- 4) у движения неподвижных точек нет.

Попробуем решить поставленный вопрос при помощи исследований каждого из этих случаев отдельно.

Исследование 6.1.

Пусть при некотором движении φ остались неподвижными три точки плоскости - A, B, C , не лежащие на одной прямой. Попытаемся определить вид движения φ .

В результате движения φ произвольная точка плоскости M переходит в точку M_1 . По определению движения $M_1A = MA$ (рис.9).

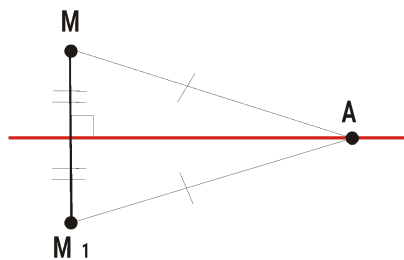


Рис.9

Если точки M_1 и M различные, то точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1 . Аналогично точки B и C лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1 . Но по условию точки A, B, C , не лежат на одной прямой. Следовательно, точки M_1 и M не могут быть различными, а значит, они совпадают.

Таким образом, рассматриваемое движение переводит каждую точку плоскости в себя, т.е. является тождественным отображением.

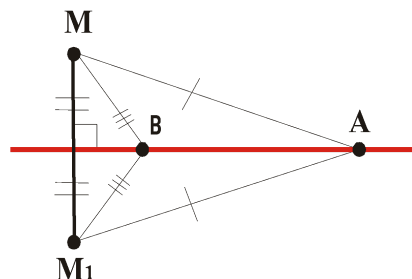
Вывод: *если движение φ оставляет неподвижным три неколлинеарные точки плоскости, то это движение – тождественное отображение ($\varphi = \epsilon$).*

Исследование 6.2.

Пусть при некотором движении φ остались неподвижными две точки плоскости - A и B . Попытаемся определить вид движения φ .

В результате движения φ произвольная точка M , не лежащая на прямой AB , переходит в точку M_1 (рис.10).

Рис.10



Если точки M и M_1 совпадают, то $\varphi = \epsilon$, поскольку оно оставляет неподвижными три неколлинеарные точки (A, B и M).

Если же точки M и M_1 различные, то из равенств $AM = AM_1$ и $BM = BM_1$ следует, что прямая AB является серединным перпендикуляром к отрезку MM_1 . Иными словами, точки M и M_1 симметричны относительно прямой AB , все точки которой, как несложно заметить, остаются неподвижными.

Таким образом, рассматриваемое движение переводит каждую точку плоскости в точку, симметричную ей относительно прямой AB , а значит движение φ является осевой симметрией.

Вывод: *если движение $\varphi \neq \epsilon$ и оставляет неподвижным две точки плоскости, то это движение – осевая симметрия ($\varphi = \sigma_l$).*

Исследование 6.3.

Пусть при некотором движении φ осталась неподвижной лишь одна точка плоскости – точка O . Попытаемся определить вид движения φ .

В результате движения φ произвольная точка M , отличная от точки O , переходит в точку M_1 (рис.11). Поскольку $OM=OM_1$, то точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1 .

Рассмотрим симметрию, осью которой является этот серединный перпендикуляр. При этой симметрии точка O останется неподвижной, а точка M перейдёт в точку M_1 .

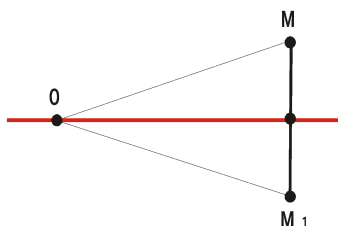


Рис.11

Теперь представим, что движение φ выполнялось в два этапа: сначала было выполнено какое-то неизвестное движение, а затем указанная осевая симметрия. Нетрудно видеть, что неизвестное движение представляет собой композицию исходного движения φ и указанной осевой симметрии. Это неизвестное движение должно оставлять точки O и M неподвижными. Тогда в результате осевой симметрии они перейдут в O и M_1 .

Таким образом, оно может быть либо тождественным отображением, либо осевой симметрией с осью OM . Но тождественным отображением оно быть не может, иначе исходное движение было бы осевой симметрией и, соответственно, оставляло бы неподвижными все точки оси, что противоречит условию. Следовательно, оно – осевая симметрия с осью OM . Но тогда исходное движение состоит из композиции двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в точке O , а значит, является поворотом вокруг точки O .

Вывод: *если движение φ оставляет неподвижным только одну точку, то это движение – поворот вокруг неподвижной точки ($\varphi = p^O$).*

Исследование 6.4.

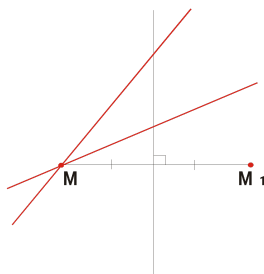
Пусть при некотором движении φ не осталось ни одной неподвижной точки. Попытаемся определить вид движения φ .

В результате движения φ произвольная точка M переходит в точку M_1 .

Теперь представим, что движение φ выполнялось в два этапа: сначала было выполнено какое-то неизвестное движение, а затем осевая симметрия, осью которой является серединный перпендикуляр к отрезку MM_1 (рис.12). Поскольку при этой симметрии точка M переходит в M_1 , то неизвестное движение должно оставлять точку M неподвижной.

Таким образом, оно может быть либо тождественным отображением, либо осевой симметрией, либо поворотом вокруг точки M . Но тождественным отображением оно быть не может, иначе исходное движение было бы осевой симметрией, что противоречит условию.

Рис.12

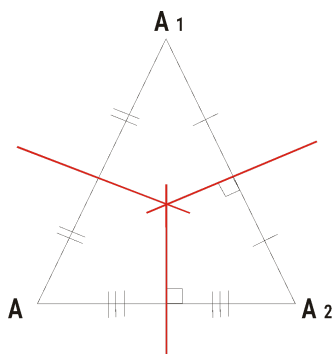


Осевой симметрией оно может быть только в том случае, когда её ось параллельна серединному перпендикуляру к отрезку MM_1 (иначе всё движение представляло бы собой композицию двух осевых симметрий с пересекающимися осями, т.е. поворот – а это вновь противоречит условию). В этом случае всё движение представляет собой параллельный перенос.

Остаётся проверить, было ли неизвестное движение поворотом вокруг точки M , т.е. результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в точке M .

Поскольку серединный перпендикуляр к отрезку MM_1 не проходит через точку M , то исходное движение φ представляет собой в этом случае композицию трёх осевых симметрий, оси которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу (две из них пересекаются в точке M). Такого движения мы до сих пор не рассматривали. Выясним, действительно ли оно не имеет ни одной неподвижной точки.

Рис.13



Предположим, что неподвижной остаётся некоторая точка A . Это означает, что в результате первой симметрии она перешла в точку A_1 (возможно точку A_1 , совпадающую с A), в результате второй - в точку A_2 , а в результате третьей - вновь в точку A (рис.13). Если все три точки различны, то оси первой, второй и третьей симметрий - это серединные перпендикуляры к отрезкам AA_1 , A_1A_2 и A_2A . Поэтому если AA_1A_2 - треугольник, то оси пересекаются в одной точке, а если точки A , A_1 и A_2 лежат на одной прямой, то оси параллельны друг другу. И то, и другое противоречит условию. Противоречит условию и случай, когда какие-то из этих точек совпадают.

Вывод: *если движение не оставляет ни одной неподвижной точки, то это движение либо параллельный перенос, либо последовательное выполнение трёх осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке.*

Теперь можно ответить на поставленный вопрос: помимо параллельного переноса, поворота и осевой симметрии есть ещё одно движение, представляющее собой последовательное выполнение трёх осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке. Наши исследования показали, что других движений нет. Итак, *любое движение представляет собой либо осевую симметрию, либо поворот, либо параллельный перенос, либо последовательное выполнение трёх осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не проходят через одну точку.*

Учитывая результаты проведённых исследований и особые свойства осевой симметрии (см. п.4.3.2), можно сформулировать окончательный вывод:

любое движение представляет собой либо осевую симметрию, либо последовательное выполнение двух или трёх осевых симметрий.

Теорема подвижности. Два рода движений.

Теорема. Пусть $F_1 = (\pi, l_A)$ и $F_2 = (\pi_m, m_B)$ – произвольные флаги.

Существует единственное движение φ , переводящее флаг F_1 во флаг F_2 .

Доказательство.

Рассмотрим четыре случая.

1. $A = B$, $l_A = m_B$, $\pi_l = \pi_m$.

В этом случае очевидно, что φ является тождественным отображением ($\varphi = \varepsilon$).

2. $A = B$, $l_A = m_B$, $\pi_l \neq \pi_m$.

Т.к. полуплоскости π_l , π_m имеют общую границу $l = m$ и различны, то $\pi_m = \pi'_l$. Следовательно, в этом случае движение φ является осевой симметрией с осью l ($\varphi = \sigma_l$).

3. $A = B$, $l_A \neq m_B$.

Определим прямую p , которая будет являться осью симметрии так, что $\sigma_p(l_A) = m_B$. Образ полуплоскости π_l , полученный при симметрии σ_p , обозначим через α . Ясно, что граница полуплоскости α – прямая m .

Введём теперь в рассмотрение флаг $F = (\alpha, m_B)$. В силу выбора флага F симметрия σ_p переводит флаг F_1 в F . Поскольку флаги $F = (\alpha, m_B)$ и $F_2 = (\pi_m, m_B)$ имеют совпадающие древки, к ним применим либо п.1 данного доказательства (если $\alpha = \pi_m$), либо п.2 (если $\alpha = \pi'_m$). Таким образом, найдётся движение φ_1 , переводящее F в F_2 . Поэтому движение $\varphi = \varphi_1 \circ \sigma_p$ переводит F_1 в F_2 . Заметим, что движение φ в этом случае является композицией двух осевых симметрий.

4. $A \neq B$.

Определим прямую q , которая будет являться осью симметрии так, что $\sigma_q(A) = B$. Образ луча l_A , полученный при симметрии σ_q обозначим через a , образ полуплоскости π_l – через α . Ясно, что граница полуплоскости α – прямая, содержащая луч a .

Введём теперь в рассмотрение флаг $F = (\alpha, a)$. Как и выше, симметрия σ_q переводит флаг F_1 во флаг F , а к флагам F и F_2 применим один из пунктов 1-3 (т.к. лучи $a = \sigma_q(l_A)$ и m_B имеют общее начало B). Поэтому движение φ_2 , переводящее флаг F в F_2 . Т.к. выше было отмечено, что φ_2 является композицией двух осевых симметрий, то $\varphi = \sigma_q \circ \varphi_2$ есть композиция трёх осевых симметрий.

Итак, мы доказали, что для любых флагов F_1 и F_2 всегда найдётся движение, переводящее F_1 в F_2 .

Покажем теперь, что такое движение единственно. Пусть движения φ и ψ таковы, что $\varphi(F_1) = F_2$ и $\psi(F_1) = F_2$. Тогда $\psi^{-1}(F_2) = F_1$ и $\psi^{-1} \circ \varphi(F_1) = \psi^{-1}(\varphi(F_1)) = \psi^{-1}(F_2) = F_1$.

Таким образом, движение оставляет на месте флаг F , т.е. является тождественным отображением: $\psi^{-1} \circ \varphi = \varepsilon$. Отсюда немедленно следует, что $\varphi = \psi$, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть φ – движение, F_1, F_2 – произвольные флаги. Тогда:

- 1) если F_1 и $\varphi(F_1)$ одинаково ориентированы, то F_2 и $\varphi(F_2)$ одинаково ориентированы;
- 2) если F_1 и $\varphi(F_1)$ противоположно ориентированы, то F_2 и $\varphi(F_2)$ имеют разную ориентацию.

Теперь можно ввести понятие *рода движений*.

Определение. Движение, сохраняющее ориентацию некоторого флага, называется

движением первого рода (собственным движением).

Движение, изменяющее ориентацию некоторого флага, называется

движением второго рода (несобственным движением).

Нетрудно убедиться в правильности следующих трёх утверждений:

1. *Композиция любого числа движений первого рода является движением первого рода.*
2. *Композиция чётного числа движений второго рода является движением первого рода.*
3. *Композиция нечётного числа движений второго рода является движением второго рода.*

Примерами движений второго рода являются осевая симметрия и скользящая симметрия. В п.6 данного реферата было показано, что любой параллельный перенос и любой поворот представимы в виде композиции двух осевых симметрий, поэтому параллельные переносы и повороты являются движениями первого рода.

Классификация движений. Теорема Шалля.

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы Шалля, напомним, что движение, множество всех неподвижных точек которого составляет прямую, является осевой симметрией (теорема 4.3.2, исследование 6.2). Если же движение имеет одну неподвижную точку, то оно есть поворот (исследование 6.3). Кроме того, множество всех неподвижных точек произвольного движения одного из следующих четырёх типов: вся плоскость, произвольная прямая, точка и пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента).

Обозначим множество всех неподвижных точек движения φ через $l(\varphi)$. Рассмотрим два вспомогательных утверждения.

Предложение 8.1. Пусть φ - движение первого рода, не имеющее неподвижных точек.

Тогда φ является параллельным переносом.

Напомним, что если движение не оставляет ни одной неподвижной точки, то это движение - параллельный перенос (исследование 6.4).

Если A – произвольная точка плоскости, то пусть $B = \varphi(A)$. Ясно, что $B \neq A$. Тогда движение $\psi = \tau_{\overline{AB}} \circ \varphi$ является движением первого рода и имеет неподвижную точку A .

BA

Множество $l(\psi)$ не может быть прямой, поскольку тогда ψ было бы зеркальной симметрией, а это движение второго рода.

Если $l(\psi) = \{A\}$, то ψ является некоторым поворотом ρ_A^α . Но тогда $\varphi = \tau_{\overline{AB}} \circ \rho_A^\alpha$, то есть

AB

тоже является поворотом (при необходимости это будет доказано отдельно), что невозможно.

Таким образом, $l(\psi)$ является плоскостью, поэтому $l(\psi) = \varepsilon$, а значит $\varphi = \tau_{\overline{AB}}$.

AB

Предложение 8.2. Пусть φ - движение второго рода, не имеющее неподвижных точек.

Тогда φ является скользящей симметрией.

Пусть A – произвольная точка плоскости, $B = \varphi(A) \neq A$. Обозначим через l медиатрису сегмента AB и рассмотрим движение $\psi = \sigma_l \circ \varphi$. Ясно, что φ – движение первого рода и A – его неподвижная точка. Множество неподвижных точек $l(\psi)$ не может быть ни плоскостью, ни прямой. Поэтому $l(\psi)$ либо пусто, либо состоит из одной точки; в первом случае ψ – параллельный перенос, во втором – поворот. Таким образом, движение $\varphi = \sigma_l \circ \psi$ – композиция зеркальной симметрии и движения, являющегося параллельным переносом или поворотом. Поскольку φ не имеет неподвижных точек, φ – зеркальная симметрия.

Теорема Шалля. Каждое движение первого рода является либо параллельным

переносом, либо поворотом;

каждое движение второго рода - либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия.

Доказательство.

Пусть φ – произвольное движение первого рода. Можно считать, что $\varphi \neq \varepsilon$. Множество $l(\varphi)$ в этом случае либо пусто, либо одноэлементно. В первом случае φ – параллельный перенос, во втором – поворот.

Пусть теперь φ – произвольное движение второго рода. Множество $l(\varphi)$ в этом случае либо пусто, либо является прямой. Это означает, что φ либо скользящая симметрия, либо осевая симметрия. Теорема доказана.

Движения как группа геометрических преобразований.

Пусть D – множество всех движений плоскости. На этом множестве определены две операции:

- 1) операция композиции движений;
- 2) операция взятия обратного движения.

Будем говорить, что D является *группой* относительно указанных операций, или *группой преобразований*.

Кроме множества всех движений плоскости можно указать и другие группы преобразований, например, множество T всех параллельных переносов. А вот множество всех осевых симметрий группой преобразований не является, т.к. композиция двух осевых симметрий – не осевая симметрия. Аналогично, нельзя назвать группой преобразований и множество всех центральных симметрий. Однако можно доказать, что множество S всех центральных симметрий и параллельных переносов, вместе взятых, уже представляет собой группу.

Вообще, множество всех преобразований, которые что-то сохраняют, как нетрудно понять, всегда будет группой, чем бы ни было это «что-то». К таким группам относятся:

- группа всех движений плоскости – они сохраняют расстояния между точками;
- группа преобразований подобия – они сохраняют отношения расстояний;
- группа аффинных преобразований – они сохраняют прямые;
- группа проективных преобразований – они сохраняют прямолинейное расположение точек;
- группа круговых преобразований – они переводят какую-то систему линий в нее же.

Группы преобразований играют в геометрии ключевую роль. Можно даже определить евклидову геометрию как теорию,

изучающую свойства фигур, не изменяющиеся под действием элементов группы движений.

С той же точки зрения можно рассматривать и другие, неевклидовы геометрии, которым соответствуют иные группы

преобразований. Феликс Клейн поместил понятие группы в фундамент геометрии. Но оно глубоко проникло и в такие области

математики, как *анализ* и *комбинаторика*, не говоря уже об *алгебре*. Существует целая наука, изучающая группы, которая так и

называется – *теория групп*. На основе понятия групп была построена *топология*. Группы стали рабочим инструментом и в таких

приложениях математики, как *теория кодирования* и *кристаллография*. А некоторых разделов современной теоретической физики, например *теории элементарных частиц*, просто не существовало бы без теории групп.

Обобщая и подытоживая всё, что изложено выше в данном реферате, можно с уверенностью констатировать:

движения плоскости, т.е. преобразования, сохраняющие расстояние, составляют наиболее важную группу среди всех геометрических преобразований - группу движений плоскости.

Литература

1. Александров А.Л. и др. Геометрия: Учеб. Для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений/М.: Просвещение, 1995 г.
2. Александров А.Л. и др. Геометрия для 10-11 классов: Учеб.пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики/М.: Просвещение, 1995 г.
3. Атанасян Л.С. и др. Геометрия: Учеб. Для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений/М., 1999 г.
4. Атанасян Л.С. и др. Доп. главы к шк. учеб. 9 кл. /М.: Просвещение, 1997 г.
5. Каазик Ю.Я. Математический словарь. Таллин: Валгус. 1985 г.
6. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. Для 7-11 кл. сред. шк. /М.: Просвещение, 1993 г.
7. Расин В.В. Лекции по геометрии: Аксиомы планиметрии. Преобразования плоскости. Учебное пособие. Екатеринбург: УрГУ, 2000 г.
8. Малая математическая энциклопедия. Академия наук Венгрии. Будапешт, 1976 г.
9. Математика. Большой энциклопедический словарь. Научное изд-во «Большая российская энциклопедия»/М., 1998 г.
10. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика/М.: Аванта+, 2000 г.
11. Энциклопедический словарь юного математика/М.: Педагогика, 1989 г.
12. Материалы Internet: <http://www.matk.rsu.ru/mexmat/post/metod/g110/g110.ru.htm>.