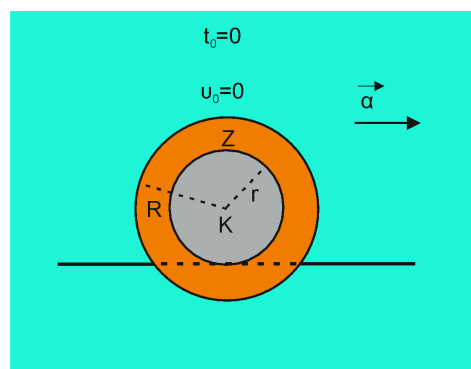


Μία κύλιση

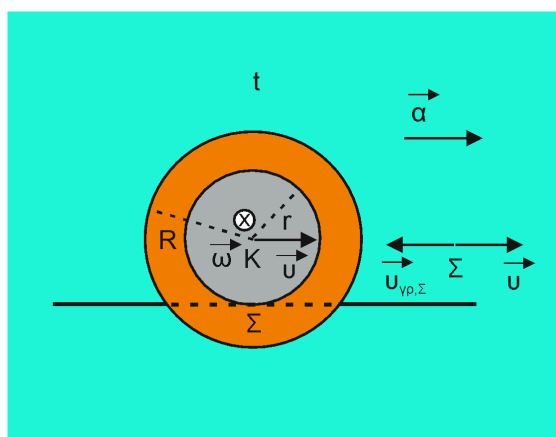
Λεπτός τροχός εξωτερικής ακτίνας $R = 0,5\text{m}$ φέρει εγκοπή εσωτερικής ακτίνας $r = 0,4\text{m}$ και είναι ακίνητος σε οριζόντια ράγα. Ο τροχός μπορεί να κυλίεται πάνω στη ράγα με την εσωτερική του περιφέρεια σε επαφή με αυτή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο τροχός αρχίζει να επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 1\text{m/s}^2$ με το σημείο Z του σχήματος να είναι εκείνη τη στιγμή το ανώτατο σημείο της εσωτερικής περιφέρειας του τροχού.



- α. να εξηγήσετε αναλυτικά γιατί κάθε στιγμή η τιμή της ταχύτητας $\vec{u}$ του κέντρου K του τροχού και η αντίστοιχη τιμή της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$ συνδέονται με τη σχέση $u = \omega \cdot r$
- β. να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$
- γ. να υπολογίσετε τη μετατόπιση του τροχού, όταν το σημείο Z θα έρθει σε επαφή με τη ράγα για 2η φορά μετά τη στιγμή $t_0 = 0$
- δ. τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$ να υπολογίσετε:
- την ταχύτητα του κατώτατου σημείου P του τροχού
 - το μέτρο της επιτάχυνσης του αριστερού άκρου Θ της οριζόντιας ακτίνας $K\Theta$, η οποία έχει μήκος $0,5\text{m}$.

Απάντηση

- α. Θεωρούμε την κίνηση του τροχού ως σύνθετη: μια μεταφορική με ταχύτητα του κέντρου K ίση με $\vec{u}$ και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα ίση με $\vec{\omega}$. Την τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Σ του τροχού είναι σε επαφή με τη ράγα. Λόγω κύλισης (μη ολίσθησης) θα πρέπει το σημείο Σ να έχει ίδια ταχύτητα με τη ράγα



$$v_{\Sigma} = 0 \rightarrow v - v_{\gamma P, \Sigma} = 0 \rightarrow v - \omega \cdot r = 0 \rightarrow v = \omega \cdot r$$

β. Ισχύει

$$v = v_0 + \alpha \cdot (t - t_0) \xrightarrow{t=4s} v = 4 \text{ m/s}$$

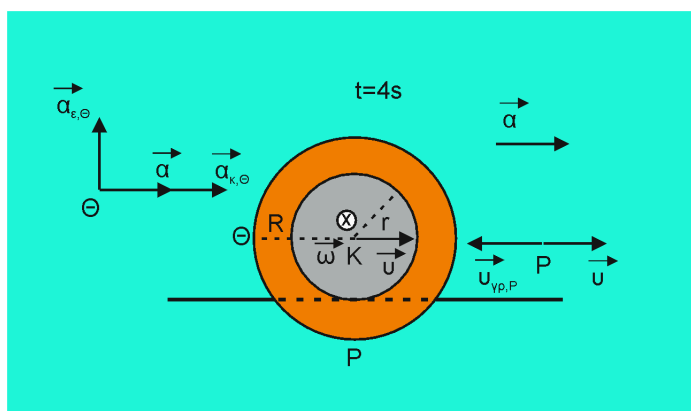
Όμως $v = \omega \cdot r \rightarrow \omega = \frac{v}{r} \xrightarrow{t=4s} \omega = 10 \text{ rad/s}$

γ. Όταν το σημείο Z θα έρθει σε επαφή με τη ράγα για 2η φορά μετά τη στιγμή $t_0 = 0$, η γωνιακή μετατόπιση του τροχού θα είναι $\Delta\theta = 3\pi$. Λόγω κύλισης θα ισχύει $\Delta x = \Delta\theta \cdot r \rightarrow \Delta x = 1,2 \cdot \pi \text{ m}$

δ. i. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία P και Θ τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$. Για την ταχύτητα του σημείου P είναι:

$$v_P = v - v_{\gamma P, P} \rightarrow v_P = v - \omega \cdot R \xrightarrow{v=4\text{m/s}, \omega=10\text{rad/s}} v_P = -1 \text{ m/s}$$

με κατεύθυνση προς τα αριστερά.



ii. Για το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Θ τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$ είναι:

$$\alpha_{\kappa, \Theta} = \omega^2 \cdot R \xrightarrow{\omega=10\text{rad/s}} \alpha_{\kappa, \Theta} = 50 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{\varepsilon, \Theta} = \alpha_{\gamma} \cdot R \xrightarrow{\alpha=\alpha_{\gamma} \cdot r} \alpha_{\varepsilon, \Theta} = \frac{\alpha}{r} \cdot R \rightarrow \alpha_{\varepsilon, \Theta} = 1,25 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{\Theta, x} = \alpha_{\kappa, \Theta} + \alpha \rightarrow \alpha_{\Theta, x} = 51 \text{ m/s}^2$$

Επομένως

$$\alpha_{\Theta} = \sqrt{\alpha_{\Theta, x}^2 + \alpha_{\Theta, y}^2} \rightarrow \alpha_{\Theta} = \sqrt{\alpha_{\Theta, x}^2 + \alpha_{\varepsilon, \Theta}^2} \rightarrow \alpha_{\Theta} = \sqrt{51^2 + 1,25^2} \text{ m/s}^2$$

Παπάζογλου Αποστόλης

apostolospapazoglou@gmail.com