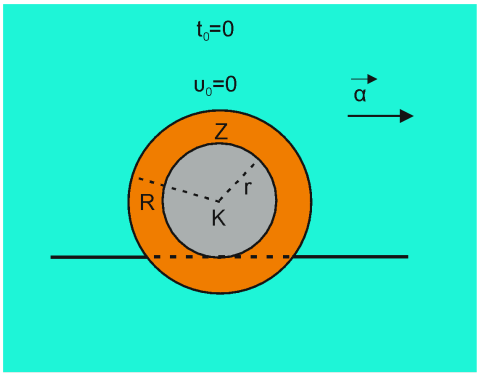
Μία κύλιση



Λεπτός τροχός εξωτερικής ακτίνας R = 0,5m φέρει εγκοπή εσωτερικής ακτίνας r = 0,4m και είναι ακίνητος σε οριζόντια ράγα. Ο τροχός μπορεί να κυλίεται πάνω στη ράγα με την εσωτερική του περιφέρεια σε επαφή με αυτή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο τροχός αρχίζει να επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 1m/s^2$ με το σημείο Z του σχήματος να είναι εκείνη τη στιγμή το ανώτατο σημείο της εσωτερικής περιφέρειας του τροχού.

α. να εξηγήσετε αναλυτικά γιατί κάθε στιγμή η τιμή της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του κέντρου K του τροχού και η αντίστοιχη τιμή της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$ συνδέονται με τη σχέση $\upsilon = \omega \cdot r$

β. να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη χρονική στιγμή t = 4s

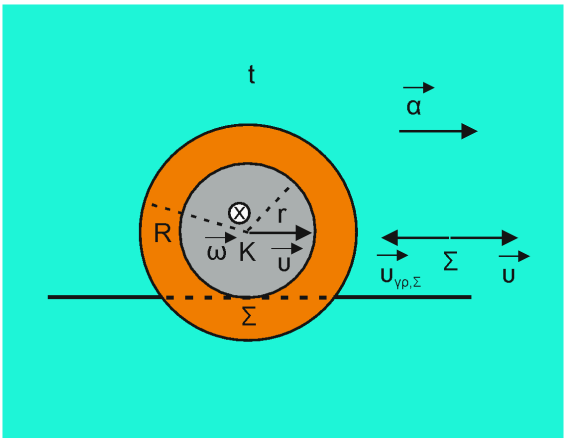
γ. να υπολογίσετε τη μετατόπιση του τροχού, όταν το σημείο Z θα έρθει σε επαφή με τη ράγα για 2η φορά μετά τη στιγμή $t_0 = 0$

δ. τη χρονική στιγμή t = 4s να υπολογίσετε:

i. την ταχύτητα του κατώτατου σημείου P του τροχού

ii. το μέτρο της επιτάχυνσης του αριστερού άκρου Θ της οριζόντιας ακτίνας ΚΘ, η οποία έχει μήκος 0,5m.

Απάντηση



α. Θεωρούμε την κίνηση του τροχού ως σύνθετη: μια μεταφορική με ταχύτητα του κέντρου K ίση με $\vec{\upsilon}$ και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα ίση με $\vec{\omega}$. Την τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Σ του τροχού είναι σε επαφή με τη ράγα. Λόγω κύλισης (μη ολίσθησης) θα πρέπει το σημείο Σ να έχει ίδια ταχύτητα με τη ράγα

$$\upsilon_{\Sigma} = 0 \rightarrow \upsilon - \upsilon_{\gamma\rho,\Sigma} = 0 \rightarrow \upsilon - \omega \cdot r = 0 \rightarrow \upsilon = \omega \cdot r$$

β. Ισχύει

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot (t - t_0) \xrightarrow{t=4s} \upsilon = 4\ m/s$$

Όμως $\upsilon = \omega \cdot r \rightarrow \omega = \dfrac{\upsilon}{r} \xrightarrow{t=4s} \omega = 10\ rad/s$

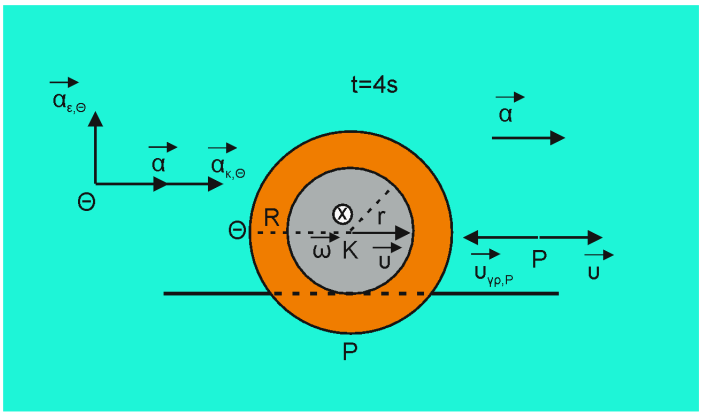
γ. Όταν το σημείο Ζ θα έρθει σε επαφή με τη ράγα για 2η φορά μετά τη στιγμή $t_0 = 0$, η γωνιακή μετατόπιση του τροχού θα είναι Δθ = 3π. Λόγω κύλισης θα ισχύει $\Delta x = \Delta\theta \cdot r \rightarrow \Delta x = 1{,}2 \cdot \pi\ m$

δ. i. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία Ρ και Θ τη χρονική στιγμή t = 4s. Για την ταχύτητα του σημείου Ρ είναι:

$$\upsilon_P = \upsilon - \upsilon_{\gamma\rho,P} \rightarrow \upsilon_P = \upsilon - \omega \cdot R \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\upsilon=4m/s,\ \omega=10\ rad/s]{t=4s} \upsilon_P = -1\ m/s$$

με κατεύθυνση προς τα αριστερά.



ii. Για το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Θ τη χρονική στιγμή t = 4s είναι:

$$\alpha_{\kappa,\Theta} = \omega^2 \cdot R \xrightarrow[\omega=10\ rad/s]{t=4s} \alpha_{\kappa,\Theta} = 50\ m/s^2$$

$$\alpha_{\varepsilon,\Theta} = \alpha_{\gamma} \cdot R \xrightarrow{\alpha=\alpha_{\gamma} \cdot r} \alpha_{\varepsilon,\Theta} = \frac{\alpha}{r} \cdot R \rightarrow \alpha_{\varepsilon,\Theta} = 1{,}25\ m/s^2$$

$$\alpha_{\Theta,x} = \alpha_{\kappa,\Theta} + \alpha \rightarrow \alpha_{\Theta,x} = 51\ m/s^2$$

Επομένως

$$\alpha_{\Theta} = \sqrt{\alpha_{\Theta,x}^2 + \alpha_{\Theta,y}^2} \rightarrow \alpha_{\Theta} = \sqrt{\alpha_{\Theta,x}^2 + \alpha_{\varepsilon,\Theta}^2} \rightarrow \alpha_{\Theta} = \sqrt{51^2 + 1{,}25^2}\ m/s^2$$

Παπάζογλου Αποστόλης

apostolospapazoglou@gmail.com