

Chapitre 4 : Le dipôle électrostatique

I Champ et potentiel d'un dipôle

A) Définitions

Doublet :

Système de deux charges opposées $-q$ en N , $+q$ en P ($q > 0$)

$$\begin{matrix} -q & +q \\ \uparrow & \uparrow \\ N & P \end{matrix}$$

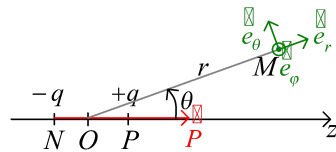
On définit le moment dipolaire électrique du doublet : $\vec{P} = q \overrightarrow{NP}$.

Un dipôle est un doublet pour lequel $a = NP \ll$ distances caractéristiques.

Approximation dipolaire : on confond le doublet et le dipôle. (ainsi, la distance au doublet est $\gg a$)

$$\begin{matrix} + \\ M \\ -q \quad +q \\ \uparrow \quad \uparrow \\ N \quad P \end{matrix}$$

B) Potentiel électrique du dipôle



On note O le milieu de $[NP]$, $a = NP$

On définit l'axe (Oz) par la droite (NP) orientée par $\overrightarrow{NP}$.

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ .

On prend comme $\frac{1}{2}$ plan $\varphi = \text{cte}$ le plan de la feuille.

Potentiel créé en M :

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 NM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

$$PM^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{PO} = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\frac{a}{2}r \cos \theta$$

Pour un dipôle, on a $r \gg a$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{PM} &= (PM^2)^{-1/2} = \left(r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right) \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right) \end{aligned}$$

De même, $NM^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\frac{a}{2}r \cos \theta$ et $\frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right)$.

Ainsi,
$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(- \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right) + 1 + \frac{a}{2r} \cos \theta + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{a}{r} \cos \theta + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right)$$

Donc, à des termes en $1/r^3$ près :

$$V(M) = \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On l'appelle le potentiel du dipôle $\vec{P}$ en O .

On a une décroissance en $1/r^2$, caractéristique du dipôle.

C) Champ électrique du dipôle

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}_M V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{e}_\phi = E_r(r) \vec{e}_r + E_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$

$$V(M) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Donc $\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_\theta = \frac{-2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ et $\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_r = \frac{-P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \frac{1}{r} \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc ; E_r, E_θ décroissent en $1/r^3$

Avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$:

$$\begin{aligned} 3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P} &= 3pr \cos \theta \cdot \vec{e}_r - r^2 (p \cos \theta \cdot \vec{e}_r - p \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta) \\ &= 2pr^2 \cos \theta \cdot \vec{e}_r + pr^2 \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

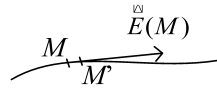
Donc ; cette formule peut ainsi être utilisée dans

n'importe quel système de coordonnées : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

D) Lignes de champ et équipotentiels

1) Lignes de champ

Equation différentielle d'une ligne de champ : $d\vec{M} \wedge \vec{E}(M) = 0$.



$$\begin{vmatrix} dr \\ d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -E_\theta r \sin \theta d\varphi = 0 \\ E_r r \cos \theta d\varphi = 0 \\ E_\theta dr - E_r r d\theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Les deux premières équations impliquent que $d\varphi = 0$, soit que $\varphi = \text{cte}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} dr - \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} r d\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \cdot dr = 2r \cos \theta \cdot d\theta$$

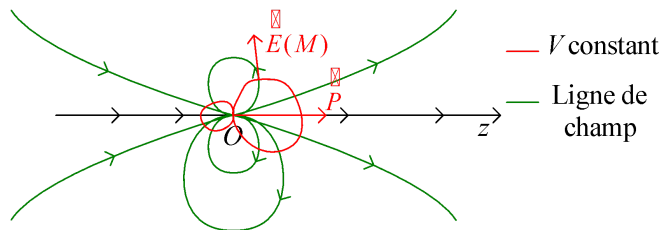
$$\Leftrightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln r = 2 \ln |\sin \theta| + \text{cte}$$

$$\Leftrightarrow r = K \sin^2 \theta$$

2) Equipotentielles

$$V(M) = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{cte} \Leftrightarrow r^2 = K' \cos \theta$$



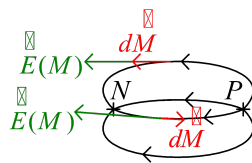
Remarque :

Pour une ligne de champ fermée Γ , parcourue « en suivant la flèche » :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} > 0$$

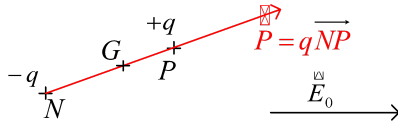
Mais $\vec{E}$ est à circulation conservative, donc $C_r(\vec{E}) = 0$ (!?!)

En réalité, l'approximation dipolaire n'est pas valable au voisinage de O ; plus précisément, on a pas, entre N et P , $\delta C > 0$:



II Action d'un champ électrique uniforme sur un dipôle

On considère un doublet :



On suppose de plus le doublet rigide, c'est-à-dire que $a = NP = \text{cte}$.

On considère un champ électrique extérieur $\vec{E}_0$ uniforme.

A) Mouvement du centre de masse

D'après le théorème de la résultante cinétique dans (R_{lab}) galiléen appliqué au doublet $\{-q \text{ en } N, +q \text{ en } P\}$:

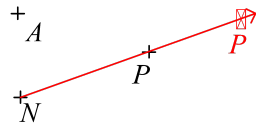
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{\rightarrow -q} + \vec{F}_{\rightarrow +q} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P) = \vec{0}$$

Donc G décrit un mouvement rectiligne uniforme.

Remarque : si $\vec{E}$ n'est pas uniforme, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N))$

B) Théorème du moment cinétique

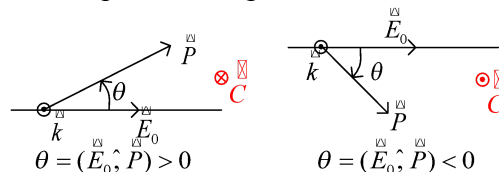
Théorème du moment cinétique appliqué à ce doublet dans (R_{lab}) , en un point A fixe dans (R_{lab}) :



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}}{dt} &= \vec{M}_A(\vec{F}_{\rightarrow -q}) + \vec{M}_A(\vec{F}_{\rightarrow +q}) \\ &= \vec{AN} \wedge (-q\vec{E}_0) + \vec{AP} \wedge (q\vec{E}_0) \\ &= q(-\vec{AN} + \vec{AP}) \wedge \vec{E}_0 \\ &= q\vec{NP} \wedge \vec{E}_0 \\ &= \vec{P} \wedge \vec{E}_0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0$$

On dit que le champ $\vec{E}_0$ exerce sur le doublet un couple $\begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{P} \wedge \vec{E}_0 \end{cases}$.



$$\vec{C} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0 = -PE_0 \sin \theta \vec{k}$$

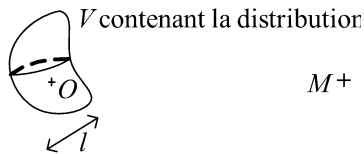
Le couple a ainsi tendance à ramener le dipôle de façon à ce que $\vec{P}$ et $\vec{E}_0$ soient alignés.

Positions d'équilibre :

$\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0$; Si $\theta = 0$, l'équilibre est stable, si $\theta = \pi$, il est instable.

III Développement multipolaire

A) Champ créé à grande distance par une distribution de charge donnée



$$l \ll OM$$

$$Q_V = \sum_{q_i \in V} q_i \text{ ou } \iiint_V \rho(P) dV_{(P)}$$

1^{er} cas : $Q_V \neq 0$

Il crée à grand distance un champ identique à celui d'une charge ponctuelle Q_V

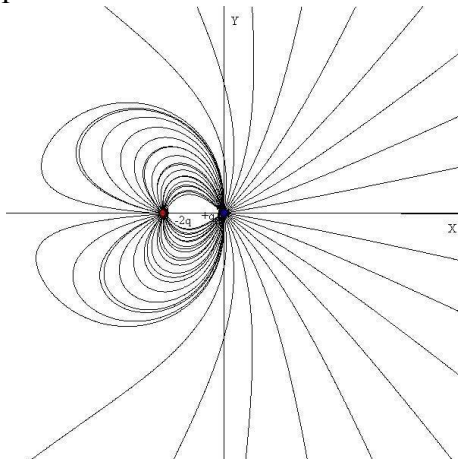
$$\sum_i q_i \vec{OM}_i = \left(\sum_{Q_V} q_i \right) \vec{OG}$$

située au barycentre G des charges ;

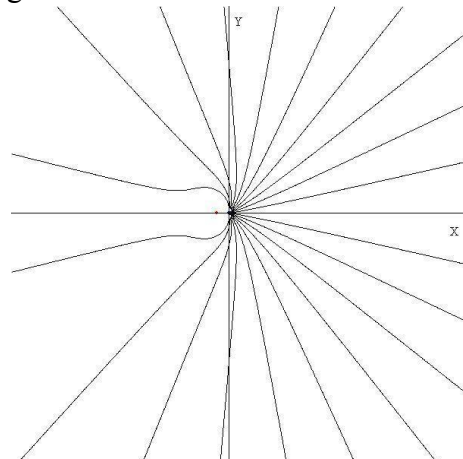
On parle alors de champ monopolaire.

Exemple de distribution de charge monopolaire :

petite échelle :



grande échelle :



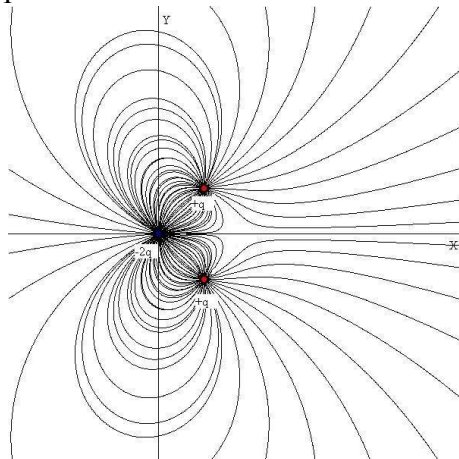
2^{ème} cas : $Q_V = 0$, et P , barycentre des charges positives, n'est pas confondu avec N , barycentre des charges négatives :

$$\sum_{i \text{ tq } q_i > 0} q_i \overrightarrow{OM_i} = \left(\sum_{\substack{i \text{ tq } q_i > 0 \\ +Q > 0}} q_i \right) \overrightarrow{OP} \quad \text{et} \quad \sum_{i \text{ tq } q_i < 0} q_i \overrightarrow{OM_i} = \left(\sum_{\substack{i \text{ tq } q_i < 0 \\ +Q < 0}} q_i \right) \overrightarrow{ON}$$

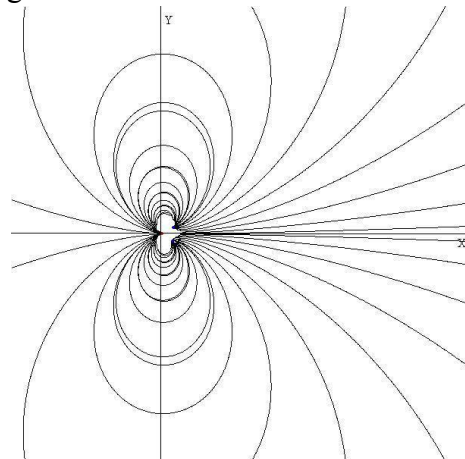
La distribution se comporte comme le dipôle $-Q$ en N , $+Q$ en P lorsqu'on en est situé à grande distance.

Exemple de distribution de charge dipolaire : H_2O

petite échelle :



grande échelle :



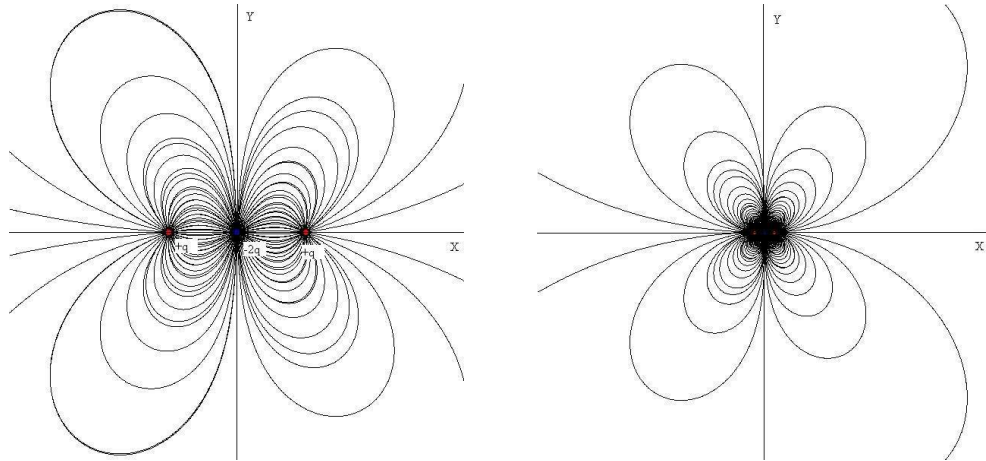
3^{ème} cas : $Q_V = 0$ et les barycentres sont confondus.

On obtient un champ de type quadripolaire, ($\|E\| \propto \frac{1}{r^4}$), octopolaire ($\|E\| \propto \frac{1}{r^5}$)...

Exemple de distribution de charge quadripolaire : CO_2

petite échelle :

grande échelle :



B) Application

- Les molécules se comportent comme des dipôles, par exemple :

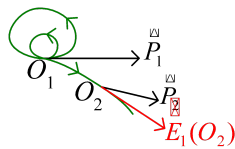
$^{+\delta}\text{H} - \text{Cl}^{-\delta}$: Cl est plus électronégatif que H. Cette molécule équivaut à :



$\vec{P} = \delta \vec{NP}$; la molécule est dite dipolaire

(c'est un dipôle indépendamment de l'environnement)

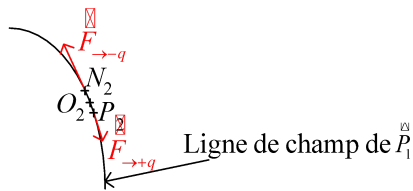
- Forces de Van der Waals :



Molécule en O_2 , moment dipolaire $\vec{P}_2$ dans le champ créé par $\vec{P}_1$ en O_1 .

1^{ère} action : orientation ; $\vec{P}_2$ tend à s'aligner sur $\vec{E}_1(O_2)$

2^{ème} action : le champ est inhomogène, la résultante des forces est donc non nulle.



$$\vec{F}_{\rightarrow -q} = -q \vec{E}_1(N_2)$$

$$\vec{F}_{\rightarrow +q} = q \vec{E}_1(P_2)$$

$$\vec{F}_{\rightarrow P_2} = q(\vec{E}_1(P_2) - \vec{E}_1(N_2)), \text{ dirigée comme } -\vec{P}_2$$

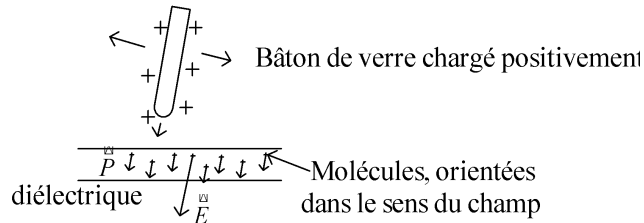
(E décroît en $1/r^3$, donc $\|\vec{E}_1(N_2)\| > \|\vec{E}_1(P_2)\|$)

Ainsi, $\vec{F}_{\rightarrow P_2}$ est dirigée en moyenne vers O_1 , on a donc une force attractive, décroissante en $1/r^7$. L'action a donc lieu à très courte distance.

- Action sur un diélectrique

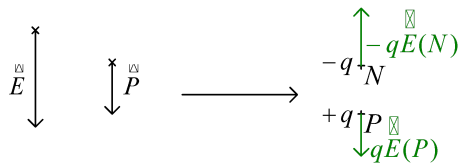
Diélectrique : matériau composé de molécules polaires.

Exemple : eau, papier, isolants.



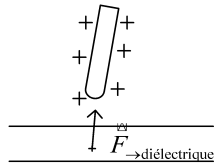
(1) Les dipôles (molécules) s'orientent dans le sens de $\vec{E}$

(2) Le champ $\vec{E}$ n'est pas uniforme.



N est plus proche que P du bâton. Donc $\|\vec{E}(N)\| > \|\vec{E}(P)\|$

Donc $\vec{F}_{\rightarrow \text{dipôle}}$ est de sens opposé à $\vec{E}$.



Donc $\vec{F}_{\rightarrow \text{diélectrique}}$ est dirigée vers le bâton. C'est vrai aussi pour une charge négative (bâton d'ambre...), puisque alors $\vec{E}$ sera dans l'autre sens, mais N et P seront aussi inversés, ce qui fait que la force exercée sur le dipôle sera dans le même sens que $\vec{E}$, c'est-à-dire vers le bâton.