

Chapitre 1 : Le champ électrique

I La charge électrique

A) Définition – propriétés

On trouve deux types d'électricité dans les corps :

- l'électricité résineuse (ambre)
- l'électricité vitreuse (verre)

L'expérience montre que deux corps d'électricités différentes s'attirent, et deux corps de même électricité se repoussent. On attribue alors (arbitrairement) un signe $-$ à l'électricité résineuse, et $+$ à l'électricité vitreuse.

L'action électrique est une grandeur extensive ; on attribue à tout corps chargé une intensité de charge en Coulomb (C).

La charge est quantifiée :

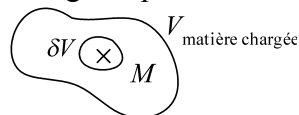
$Q = ne, n \in \mathbb{Z}$, où e est la charge élémentaire, $e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
(électron : charge $-e$; proton : charge e)

B) Densité de charge

La quantification de la charge est insensible à l'échelle macroscopique. On peut donc la considérer comme une quantité continue.

1) Distribution volumique de charge

Charges réparties en volume :



(δV : volume mésoscopique)

$\rho(M, t)$: densité volumique de charge en M

$$= \frac{\sum_{i \in \delta V} q_i}{\delta V}$$

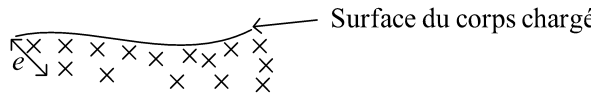
On le note aussi $\rho(M) = \frac{\delta Q}{\delta V} = \frac{dq}{dV}$, ou $dq = \rho(M) dV_{(M)}$. $[\rho] = \text{C.m}^{-3}$.

Dans un volume V chargé de dimension macroscopique, on a alors :

$$Q_V = \sum_{\substack{dV \text{ qui} \\ \text{composent} \\ V}} dq = \iiint_V dq = \iiint_V \rho(M) dV_{(M)}$$

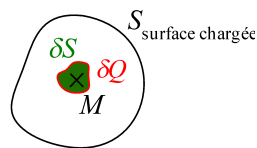
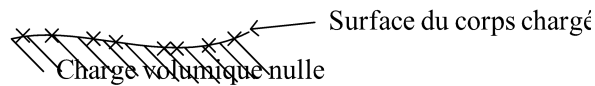


2) Distribution surfacique de charges



$e \approx 1 \mu\text{m}$ (pour un conducteur par exemple)

On assimile cette distribution à une distribution surfacée en supposant que les charges ne sont présentes que sur la surface du corps chargé.

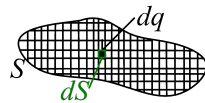


$\sigma(M, t)$: densité surfacique de charges

$$= \frac{\delta Q}{\delta S} = \frac{dq}{dS}$$

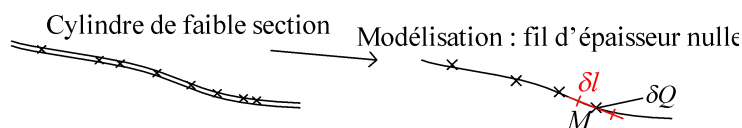
$$dq = \sigma(M) dS_{(M)} \quad [\sigma] = \text{C.m}^{-2}$$

Charge totale portée par une surface macroscopique S :



$$Q_S = \sum_{\substack{dS \text{ qui} \\ \text{composent} \\ S}} dq = \iint_S \sigma(M) dS_{(M)}$$

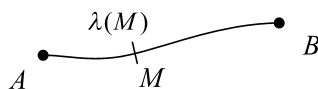
3) Distribution linéique de charges



On définit $\lambda(M, t) = \frac{\delta Q}{\delta l} = \frac{dq}{dl}$ (densité linéique de charge)

$$[\lambda] = \text{C.m}^{-1}$$

$$dq = \lambda(M) dl_{(M)}$$



$$Q_{AB} = \sum_{\substack{dl \text{ qui} \\ \text{composent} \\ AB}} dq = \int_A^B \lambda(M) dl_{(M)}$$

II Loi de Coulomb

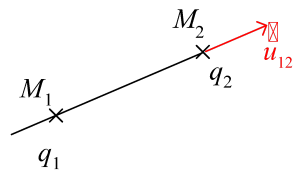
A) Cadre de l'électrostatique

- Les particules chargées sont assimilées à des points ponctuels de position M , de charge q . (condition : la distance entre les corps doit être très grande devant la dimension propre de ces atomes)

- Tous les champs sont indépendants du temps. $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$.
En particulier, ρ, σ, λ sont indépendants du temps.

B) Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles q_1, q_2 en M_1, M_2 .



$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}$$

L'interaction électrique entre deux charges dans le vide est décrite par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = K \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^2} \vec{u}_{12}$$

K : constante caractéristique de l'attraction électrique ($K > 0$)

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI (N.m}^2\text{.C}^{-2}\text{)}$$

ϵ_0 : permittivité électrique du vide.

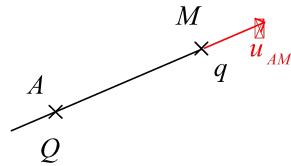
La loi de Coulomb reste valable dans un matériau isolant à condition de remplacer ϵ_0 par ϵ , permittivité électrique du milieu.

$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ (ϵ_r : permittivité relative du milieu, sans dimension)

$\epsilon_r = 1$ pour le vide ; $\epsilon_r = 1,00058$ pour l'air ; $\epsilon_r = 80$ pour l'eau.

III Le champ électrique

A) Champ créé par une charge ponctuelle



$$\vec{F}_{A \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{AM^2} \vec{u}_{AM} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 AM^2} \vec{u}_{AM}$$

$$\vec{E}_Q(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 AM^2} \vec{u}_{AM}$$

On pose

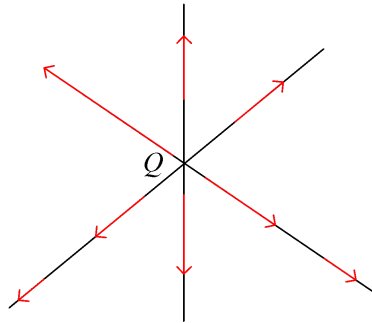
$$\vec{E}_Q(M)$$

est défini en tout point de l'espace. On l'appelle le champ électrique créé au point M par la charge Q en A .

Ainsi, $\vec{F}_{A \rightarrow M} = q\vec{E}_Q(M)$

Interprétation :

La charge Q crée un champ $\vec{E}_Q$ dans tout l'espace et c'est ce champ qui interagit localement en M avec une charge q .



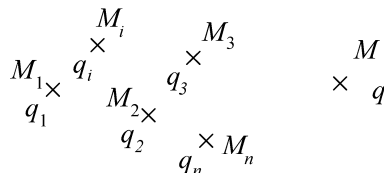
($Q > 0$ ici)

C'est un champ radial, c'est-à-dire que les lignes de champ sont des $\frac{1}{2}$ droites d'origine Q . Les surfaces équipotentielles sont ici les sphères centrées en Q .

B) Principe de superposition des champs créés par une distribution de charges quelconques

1) Distribution discrète

On considère un ensemble de charges q_i en M_i , $i \in [1, n]$.



$$\begin{aligned} \vec{F}_{\{q_i\} \rightarrow q} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{q_i \rightarrow q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q}{M_i M^2} \vec{u}_{M_i M} \text{ avec } \vec{u}_{M_i M} = \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M} \\ &= q \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{M_i M^2} \vec{u}_{M_i M} \end{aligned}$$

Définition :

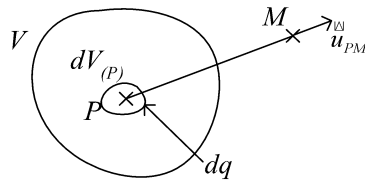
Le champ $\vec{E}_{\{q_i\}}(M)$ créé par $\{q_i\}$ en M est défini par : $\vec{F}_{\{q_i\} \rightarrow q} = q \vec{E}_{\{q_i\}}(M)$

$$\vec{E}_{\{q_i\}}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{M_i M^2} \vec{u}_{M_i M} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{q_i}(M)$$

Ainsi,

Ainsi, le champ créé par les n charges est la superposition des champs créés par chacun des champs agissant seuls.

2) Distribution volumique de charges



$dV_{(P)}$ peut être considéré comme une charge ponctuelle.

$dq = \rho(P)dV_{(P)}$. Cette charge, située en P , crée en M un champ électrique

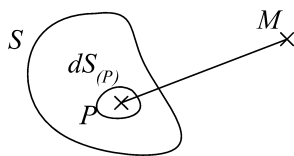
$$d\vec{E}(M) \text{ ou } d_{dq} \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

D'où :

$$\vec{E}_V(M) = \iiint_V d\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u}_{PM} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(V)dV_{(P)}}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Ce champ existe en l'absence de charge en M , mais si on ajoute une charge q en M , $\vec{F}_{V \rightarrow q} = q \vec{E}_V(M)$

3) Distribution surfacique de charges



L'élément $dS_{(P)}$ est une charge ponctuelle $dq = \sigma(P)dS_{(P)}$ en P qui crée

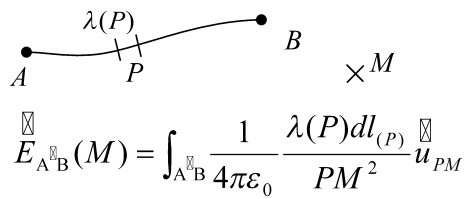
$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS_{(P)}}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

un champ en M :

$$\vec{E}_S(M) = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(V)dS_{(P)}}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

D'où

4) Distribution linéique de charges



$$E_{A \ B}(M) = \int_{A \ B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P) dl_{(P)}}{PM^2} u_{PM}$$

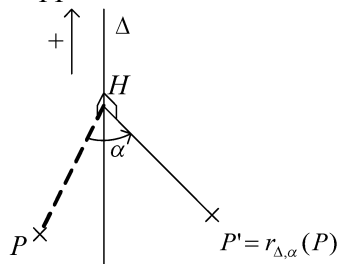
IV Symétries

A) Symétries et antisymétries de la distribution de charges

On considère une distribution de charge volumique $\{\rho\}$

$$\{\rho\}: V \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \rho(P)$$

Rappel : rotation d'axe Δ orienté et d'angle α :



On considère une isométrie s :

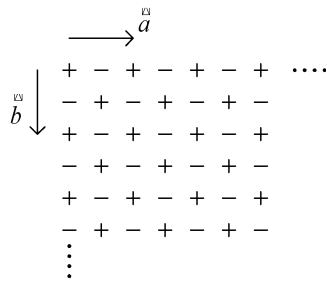
$$\begin{cases} \text{translations } t_u \\ \text{symétries planes } s_p \\ \text{rotations d'axe } \Delta \text{ orienté, d'angle } \alpha \end{cases}$$

Alors :

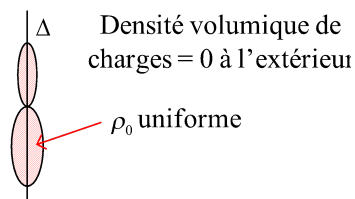
s est une symétrie pour $\{\rho\} \Leftrightarrow$ pour tout point P de l'espace, $\rho(P') = \rho(P)$.

s est une antisymétrie pour $\{\rho\} \Leftrightarrow$ pour tout point P de l'espace, $\rho(P') = -\rho(P)$.
(où $P' = s(P)$)

Exemples :



$t.a$, $t.b$ sont des symétries pour cette distribution de charges.
 $t.\frac{1}{2}a$, $t.\frac{1}{2}b$ sont des antisymétries.

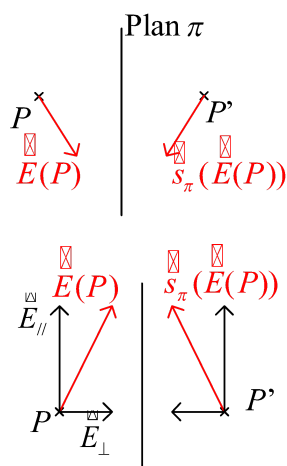


Les symétries sont toutes les rotations d'axe Δ et d'angle $\alpha \in [0, 2\pi[$; c'est une symétrie cylindrique. Pour tout plan P contenant Δ , s_P est aussi une symétrie (on dit aussi que P est un plan de symétrie pour $\{\rho\}$)

B) Symétrie et antisymétrie plane : direction de $\vec{E}$

1) Théorème (admis)

Si π est un plan de symétrie pour $\{\rho\}$, alors c'en est aussi un pour $\{\vec{E}\}$,
(c'est-à-dire que pour tout point P de l'espace, $\vec{E}(P') = s_\pi(\vec{E}(P))$; s_π : symétrie plane vectorielle)



$$\vec{E}(P) = E_{//} + E_{\perp}$$

$$s_\pi(\vec{E}(P)) = s_\pi(E_{//} + E_{\perp}) = s_\pi(E_{//}) + s_\pi(E_{\perp}) = E_{//} - E_{\perp}$$

Cas particulier :

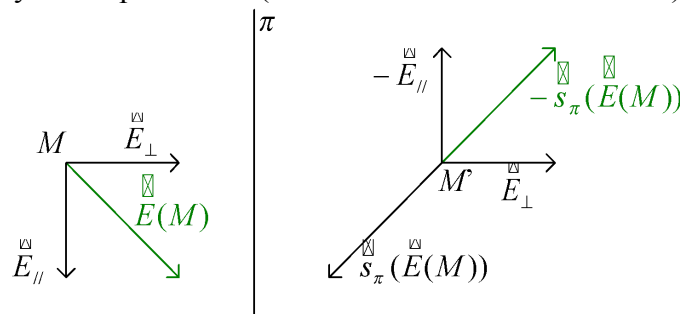
Si $M \in \pi$, alors $M' = s_\pi(M) = M$

Et $\vec{E}(M) = s_\pi(\vec{E}(M))$, d'où $\vec{E}_\perp = 0$

Ainsi, en tout point M de π , $\vec{E}(M)$ est parallèle au plan.

2) Autre théorème

Si π est un plan d'antisymétrie pour $\{\rho\}$, alors π est un plan d'antisymétrie pour $\{\vec{E}\}$. ($\forall M \in \varepsilon, \vec{E}(M') = -s_\pi(\vec{E}(M))$)



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$$

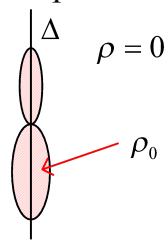
$$\vec{E}(M') = -s_\pi(\vec{E}(M)) = -\vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$$

Cas particulier :

Si $M \in \pi$, alors $M' = M$, et $\vec{E}(M') = -s_\pi(\vec{E}(M))$, soit $\vec{E}_\parallel = 0$.

Donc $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan π en tout point M du plan.

3) Exemples

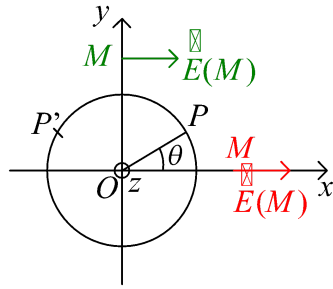


Tout les plans π qui contiennent Δ sont des plans de symétrie pour $\{\rho\}$.

Si $M \in \Delta \subset \pi$, alors $\vec{E}(M) \parallel \pi$.

On choisit deux plans π, π' distincts contenant Δ .

Alors $\vec{E}(M) \subset \pi \cap \pi'$, donc $\vec{E}(M) \parallel \Delta$



Distribution linéique de charge $\lambda(P) = \lambda_0 \cos \theta$.

Le plan yOz est un plan de symétrie pour $\{\lambda\}$:

Si P est un point du cercle, $\lambda(P') = \lambda_0 \cos(\pi - \theta) = -\lambda_0 \cos \theta = -\lambda(P)$

Sinon, $\lambda(P') = 0 = -\lambda(P)$

Ainsi, pour $M \in (Oy)$, $\vec{E}(M) \perp yOz$.

De même, si $M \in (Ox)$, $\vec{E}(M) // xOz$.

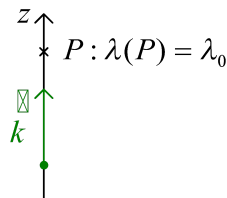
C) Invariance par symétrie : dépendance avec les variables d'espace

1) Invariance par translation de direction $\vec{u}$.

Définition :

$\{\rho\}$ est invariante par translation de direction $\vec{u} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, t_{\lambda \vec{u}}$ est une symétrie pour $\{\rho\}$.

Exemple :



Un fil infini uniformément chargé, de densité linéique de charge λ_0 constante. Cette distribution est invariante par toute translation de direction $\vec{k}$.

Théorème :

Les coordonnées cartésiennes E_x, E_y, E_z du champ $\vec{E}$ ne dépendent pas de la coordonnée repérant la position dans la direction d'invariance : ici, z .

Ou :

$$\forall M \in \varepsilon, \vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + E_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + E_z(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

Démonstration :

$\forall x, y, z, z' \in \mathbb{R}$, pour $M(x, y, z), M'(x, y, z')$ points de l'espace, on a $M' = t_{(z'-z)\vec{k}}(M)$.

C'est une symétrie pour $\{\vec{E}\}$.

Donc $\vec{E}(M') = t_{(z'-z)\vec{k}}(\vec{E}(M)) = \vec{E}(M)$

(Un vecteur est inchangé par translation...)

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{E}(M') &= E_x(x, y, z')\vec{i} + E_y(x, y, z')\vec{j} + E_z(x, y, z')\vec{k} \\ &= \vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{i} + E_y(x, y, z)\vec{j} + E_z(x, y, z)\vec{k}\end{aligned}$$

Et en projetant, on trouve le résultat voulu.

Remarque :

En coordonnées cylindriques $M(\rho, \theta, z)$, de base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$:

$$\vec{E}(M(\rho, \theta, z)) = E_\rho(\rho, \theta)\vec{e}_\rho + E_\theta(\rho, \theta)\vec{e}_\theta + E_z(\rho, \theta)\vec{k}$$

2) Invariance par rotation autour de $\Delta = (Oz)$

On dit que $\{\rho\}$ possède une symétrie cylindrique par rapport à Δ lorsque $\{\rho\}$ est invariante par toutes les rotations $r_{\Delta, \alpha}, \alpha \in [0, 2\pi[$.

Théorème :

Les composantes cylindriques E_ρ, E_θ, E_z sont indépendantes de θ (attention, $\vec{E}$ en dépend quand même par l'intermédiaire de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$)

3) Invariance par rotation d'axe passant par O .

On dit que $\{\rho\}$ possède une symétrie sphérique lorsque pour tout axe Δ passant par O , pour tout angle $\alpha \in [0, 2\pi[$, $r_{\Delta, \alpha}$ est symétrique pour $\{\rho\}$.

Théorème :

Les composantes sphériques de $\vec{E}$ (E_r, E_θ, E_ϕ) ne dépendent que de $r = OM$; on a même $E_\theta = E_\phi = 0$. (Voir chapitre 3 pour les coordonnées sphériques)

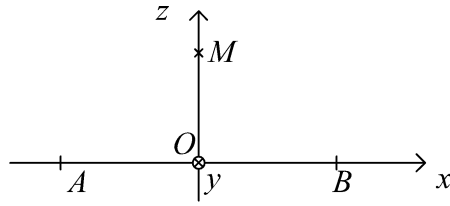
Exemple : Une charge ponctuelle.

V Calculs de champ

A) Champ électrique créé par un segment uniformément chargé dans son plan médiateur

On prend un segment $[AB]$, de longueur $AB = 2l$, un point M appartenant au plan médiateur.

On représente ici le plan passant par A, B, M :



$\forall P \in [AB], \lambda(P) = \lambda_0$ constante.

1) Direction de $\vec{E}(M)$

- $\pi = yOz$ est un plan de symétrie.

Comme $M \in \pi$, on a $\vec{E}(M) \in \pi$, ou $E_x = \vec{E}(M) \cdot \vec{i} = 0$.

- $\pi' = xOz$ est aussi un plan de symétrie.

Comme $M \in \pi'$, on a $\vec{E}(M) \in \pi'$, ou $E_y = \vec{E}(M) \cdot \vec{j} = 0$.

Ainsi, $\vec{E}(M) = E_z(M)\vec{k} = E_z(z)\vec{k}$ (puisque $M \in (Oz)$)

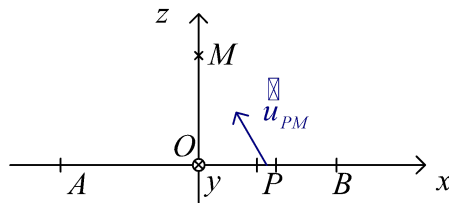
- $P = xOy$ est aussi un plan de symétrie.

On note $M' = s_P(M)$. Comme P est un plan de symétrie, on a :

$$\vec{E}(M') = s_P(\vec{E}(M)), \text{ soit } E_z(-z)\vec{k} = s_P(E_z(z)\vec{k}) = E_z(z)s_P(\vec{k}) = -E_z(z)\vec{k}$$

Donc E_z est une fonction impaire.

2) Calcul de E_z



On considère un élément infinitésimal de fil repéré par le point P d'abscisse

x_P ou x , et de longueur dx . Cet élément crée en M un champ :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0 dx}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM}, \text{ où } \vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM} = \frac{\vec{PO} + \vec{OM}}{PM}$$

$$\text{Donc } \vec{E}(M) = \int_{A'B} d\vec{E}(M)$$

$$\text{Or, } \vec{E}(M) = E_z(z)\vec{k}$$

$$\text{Donc } E_z(z) = \vec{E}(M) \cdot \vec{k} = \int_{A'B} d\vec{E}(M) \cdot \vec{k}; \quad \vec{u}_{PM} \cdot \vec{k} = \frac{\vec{PO} + \vec{OM}}{PM} \cdot \vec{k} = \frac{z}{PM}$$

Donc :

$$E_z(z) = \int_{A \rightarrow B} \frac{z \lambda_0 dx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{-l}^l \frac{z \lambda_0 dx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0 z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Une primitive de $\frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$ est $\frac{1}{z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$.

$$E_z(z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 z} \left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + z^2}} - \frac{-l}{\sqrt{l^2 + z^2}} \right) = \frac{2\lambda_0 l}{4\pi\epsilon_0 z \sqrt{l^2 + z^2}}$$

Donc

$$E(M) = \frac{2\lambda_0 l}{4\pi\epsilon_0 z \sqrt{l^2 + z^2}} \vec{k}$$

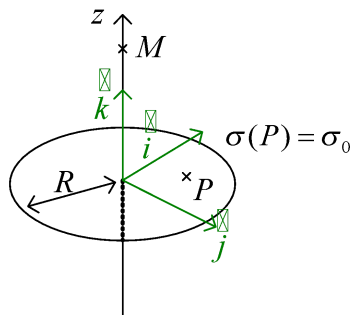
Soit

Si $z \gg l$, le segment correspond alors à une charge ponctuelle.

Vérification :

$$E(M) = \frac{2\lambda_0 l}{4\pi\epsilon_0 z \sqrt{l^2 + z^2}} \vec{k} \approx \frac{2\lambda_0 l}{4\pi\epsilon_0 z^2} \vec{k} \approx \frac{q_{AB}}{4\pi\epsilon_0 z^2} \vec{k}$$

B) Champ créé par un disque uniformément chargé



On considère un disque d'axe (Oz) , de rayon R , ayant une distribution uniforme de charge σ_0 constante.

On cherche le champ en $M \in (Oz)$.

1) Symétries

xOz est un plan de symétrie pour $\{\sigma\}$, et M est dans ce plan.

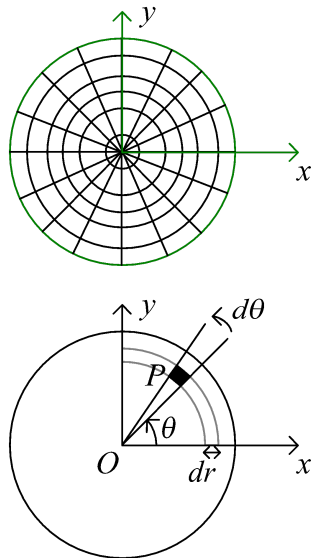
$$\text{Donc } E_y(M) = 0$$

De même avec yOz , $E_x(M) = 0$

$$\text{Donc } \vec{E}(M) = E_z(M) \vec{k} = E_z(z) \vec{k}$$

2) Calcul de E_z

Découpage de la distribution de charges :



On considère un élément infinitésimal repéré par $P(r, \theta)$ et de longueur $dr, d\theta$. Cet élément a pour aire $ds = dr \times r d\theta$ (en assimilant les arcs à la corde correspondante, de longueur $r d\theta$).

Il porte la charge $dq = \sigma(P) dS = \sigma_0 dr \times r d\theta$.

$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0 r dr \times d\theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Donc $\vec{E}(M) = \iint_{D(O,R)} d\vec{E}(M)$, et $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{k}$

Donc $E_z(z) = \iint_{D(O,R)} d\vec{E}(M) \cdot \vec{k}$

$$\vec{u}_{PM} \cdot \vec{k} = \frac{\vec{PM} \cdot \vec{k}}{PM} = \frac{z}{PM}$$

$$E_z(z) = \iint_{D(O,R)} \frac{z \sigma_0 r dr \times d\theta}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{z \sigma_0 r dr \times d\theta}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ainsi, en intégrant d'abord par rapport à θ :

$$E_z(z) = 2\pi \int_0^R \frac{z \sigma_0 r dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Une primitive de $r \mapsto \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$ est $r \mapsto \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$

$$E_z(z) = \frac{2\pi\sigma_0 z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{|z|} \right)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{2\pi\sigma_0 z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{k}$$

Soit

Lorsque $z \gg R$ (et $z > 0$) :

$$\begin{aligned}
E(M) &= \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) k = \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{R^2 + z^2} - z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) k \\
&= \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z(\sqrt{1 + R^2/z^2} - 1)}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) k \approx \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z(R^2/2z^2)}{z} \right) k \\
&\approx \frac{\pi\sigma_0 R^2}{4\pi\epsilon_0 z^2} k = \frac{q_D}{4\pi\epsilon_0 z^2} k
\end{aligned}$$