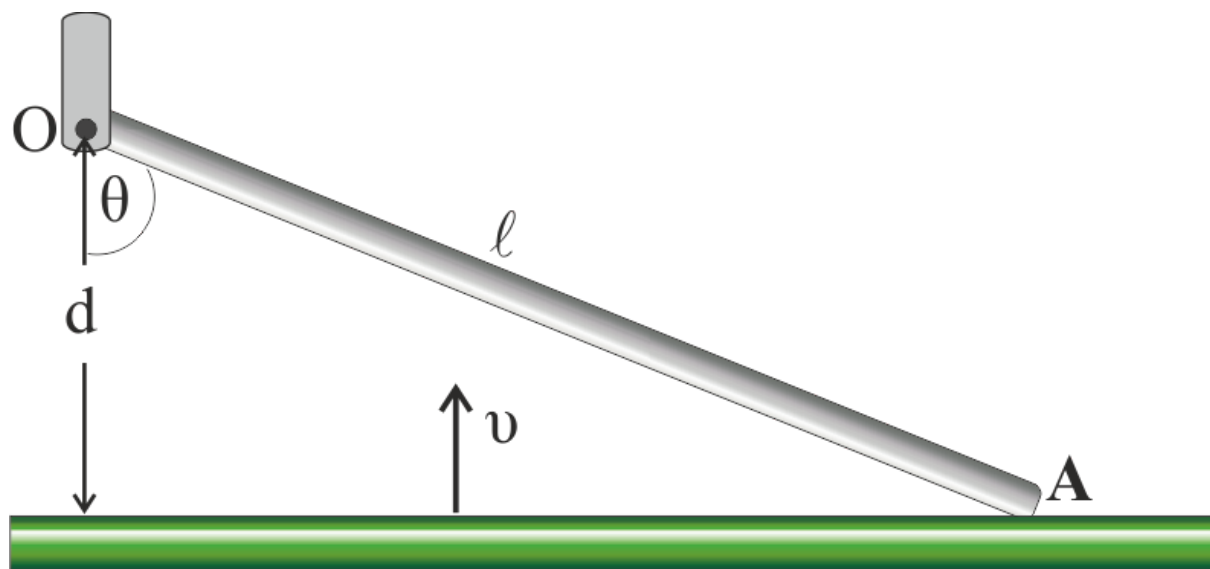


**Εκφώνηση:** Ράβδος ΟΑ, μήκους  $\ell$ , στρεπτή περί άξονα οριζόντιο διερχομένου από την άκρη της Ο εξαναγκάζεται σε περιστροφή σε κατακόρυφο επίπεδο (Σχήμα 1), αφού ακουμπά στο άλλο άκρο της Α σε οριζόντια επιφάνεια πλάκας που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v$  κατακόρυφα προς τα πάνω. Να προσδιοριστούν η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή που η επιφάνεια απέχει απόσταση  $d$  από το Ο (ή η ράβδος σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την οριζόντια διεύθυνση).



Σχήμα SEQ Σχήμα \\* ARABIC 1: Η πλάκα εξαναγκάζει τη ράβδο σε περιστροφή

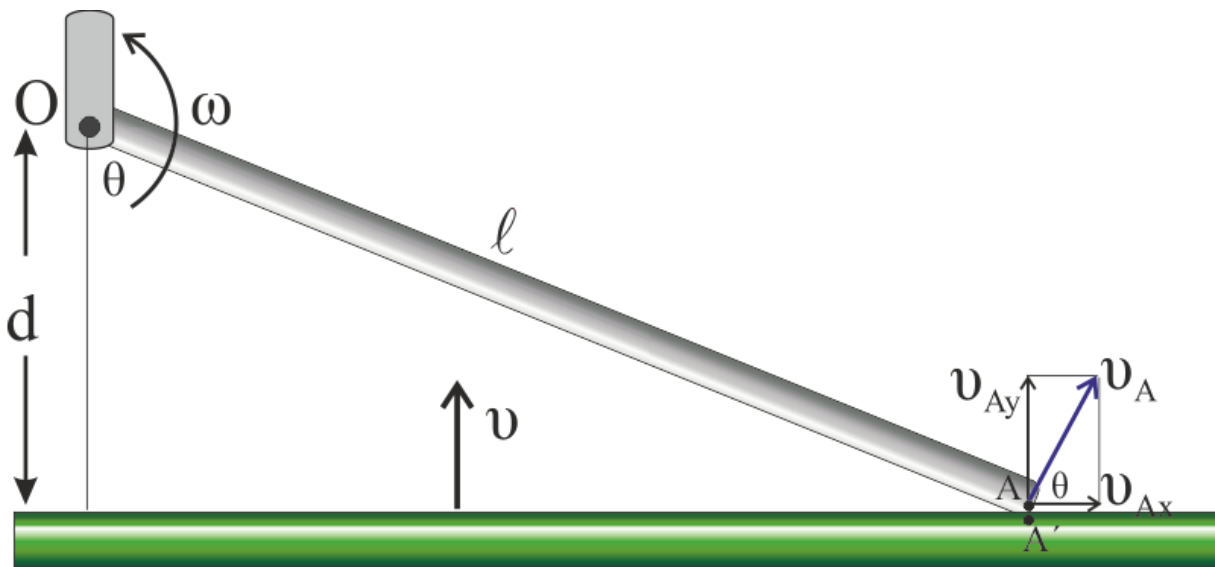
**Απάντηση:** Ας δούμε τι γίνεται ακριβώς. Η κίνηση της πλάκας προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα παράσχει και τη ράβδο που αναγκάζεται σε γνήσια περιστροφή γύρω από το σταθερό σημείο της Ο. Αυτό σημαίνει ότι η άκρη Α της ράβδου, που είναι σε επαφή με την πλάκα, θα πρέπει να έχει ταχύτητα με κατακόρυφη συνιστώσα ίση με την ταχύτητα της πλάκας.

Από την εμφανή περιστροφική κίνηση συνάγεται ότι όλα τα σημεία της ράβδου, μαζί και η άκρη του Α, εκτελούν κυκλικές κινήσεις γύρω από το Ο με εκ περιστροφής ταχύτητες κάθετες στη ράβδο και ίσες κατά μέτρο με το γινόμενο της  $\omega$  επί την απόσταση του σημείου από το Ο. Η εκ περιστροφής ταχύτητα του Α μπορεί να αναλυθεί σε κατακόρυφη προς τα πάνω συνιστώσα και σε οριζόντια προς τα δεξιά (το άκρο Α ανεβαίνει και ταυτόχρονα μετατοπίζεται - γλιστρά δεξιότερα πάνω στην πλάκα, κίνηση που προκαλείται από την άνοδο της πλάκας, αφού ακουμπά πάνω της). Από ότι είδαμε η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του Α πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα της ανερχόμενης κατακόρυφα πλάκας, σταθερής εφόσον και η της πλάκας είναι σταθερή. Έτσι έχουμε (Σχήμα 2):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \vec{v}_{A/A'} = \vec{v} + \vec{v}_{A/A'}$$

$$\left( \begin{array}{l} v_A = \omega l \perp OA \\ v_{A,y} = v = v_A \sin \theta = \omega l \sin \theta \\ v_{A,x} = v_A \cos \theta = \omega l \cos \theta \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{l} \omega = \frac{v}{l \sin \theta} \text{ ή } \theta \in (0, 90^\circ) \\ \omega = \frac{v}{l \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l}} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{v}{\sqrt{l^2 - d^2}}}, d \in (l, 0) \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\frac{v_{A,y}}{v_{A,x}} = \frac{v}{v \cot \theta} = \tan \theta$$



Καθώς η πλάκα κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα και η  $\theta$  μεγαλώνει η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  μικραίνει, όπως και η ταχύτητα του A. Η οριζόντια συνιστώσα της μικραίνει, ενώ η κατακόρυφη

$$\frac{v_{A,y}}{v_{A,x}} = \tan \theta$$

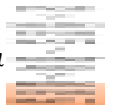
μεγαλώνει όπως και το πηλίκο .

### Γωνιακή επιτάχυνση

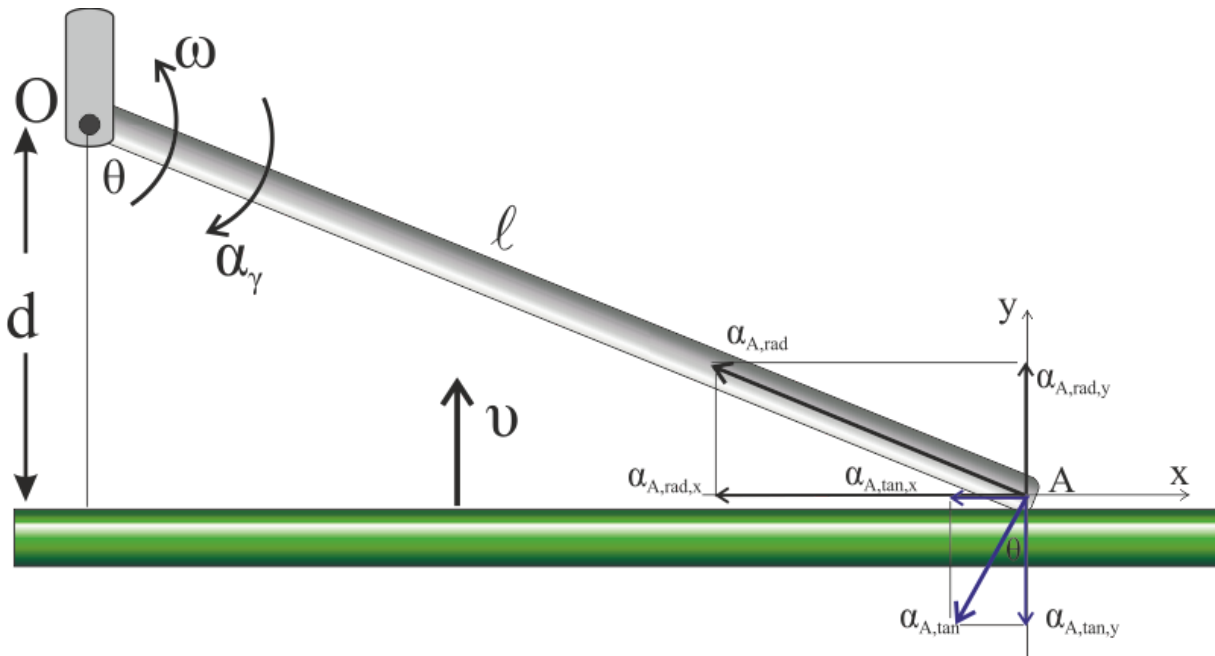
Παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο τη σχέση της γωνιακής ταχύτητας.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v}{l \sin \theta} \right) = \frac{v}{l} (-1) \sin^{-2} \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v \cos \theta}{l \sin^2 \theta} \omega = -\frac{v \cos \theta}{l \sin^2 \theta} \left( \frac{v}{l \sin \theta} \right) \rightarrow$$

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} = -\left( \frac{v}{l} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} < 0 \text{ (επιβράδυνση)} \rightarrow \dots \rightarrow a_\gamma = \frac{d^2 v}{(l^2 - d^2)^{3/2}}$$



Η ράβδος επιβραδύνεται περιστροφικά. Κάθε σημείο της ράβδου θα έχει επιτάχυνση που αναλύεται σε εφαπτομενική της τροχιάς του με κατεύθυνση αντίθετης της ταχύτητάς του και σε ακτινική με κατεύθυνση προς το O (Σχήμα 3). Και οι δύο συνιστώσες μέτρου ανάλογου της απόστασης του σημείου από το O. Για το A έχουμε:



Σχήμα 3: Ανάλυση της επιτάχυνσης του άκρου A. Όμοια ανάλυση ισχύει και για τα άλλα σημεία της ράβδου

$$\begin{aligned}\vec{a}_A &= \vec{a}_{A,tan} + \vec{a}_{A,rad} = \vec{a}_\gamma \times \vec{OA} - \omega^2 \vec{OA} \\ |\vec{a}_{A,tan}| &= l a_\gamma = \left(\frac{v}{l}\right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \rightarrow a_{A,tan} = \frac{v^2}{l} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \\ |\vec{a}_{A,rad}| &= l \omega^2 = l \left(\frac{v}{l \sin \theta}\right)^2 \rightarrow a_{A,rad} = \frac{v^2}{l} \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ a_A &= \sqrt{\left(\frac{v^2}{l} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{l} \frac{1}{\sin^2 \theta}\right)^2} \rightarrow a_A = \frac{v^2}{l} \frac{1}{\sin^3 \theta} \text{ (φθίνουσα)}\end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η επιτάχυνση του σημείου A είναι οριζόντια, δηλ. η κατακόρυφη συνιστώσα της πρέπει να είναι μηδέν, αφού η προς τα πάνω κίνηση, ακολουθώντας την κίνηση της πλάκας, γίνεται με σταθερή ταχύτητα (χωρίς επιτάχυνση). Ας το δείξουμε.

$$a_{A,y} = \omega^2 l \cos \theta - l a_\gamma \sin \theta = \left( \frac{v}{l \sin \theta} \right)^2 l \cos \theta - l \left( \frac{v}{l} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \sin \theta = \frac{v^2}{l} \left( \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) = 0$$

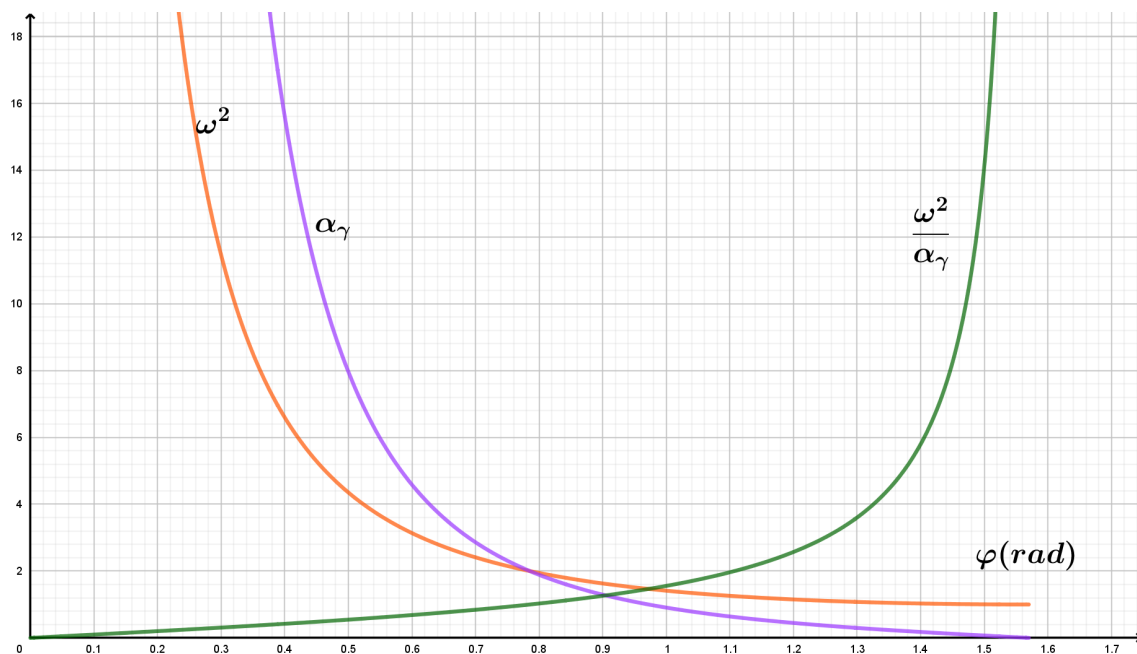
$$a_{A,x} = -\omega^2 l \sin \theta - l a_\gamma \cos \theta = -\left( \frac{v}{l \sin \theta} \right)^2 l \sin \theta - l \left( \frac{v}{l} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \cos \theta \rightarrow$$

$$a_{A,x} = -\frac{v^2}{l} \left( \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} \right) = -\frac{v^2}{l} \frac{1}{\sin^3 \theta} = a_A$$

$$\frac{\omega^2}{a_\gamma} = \tan \theta$$

Τα προηγούμενα συνεπάγονται τη σχέση που υποδεικνύει ότι το πηλίκο των δύο

συνιστωσών της επιτάχυνσης είναι συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  και μάλιστα αύξουσα.



Σχήμα 4: Γραφικές παραστάσεις της ακτινικής συνιστώσας  $\left[ \frac{\omega^2}{(v/l)^2} \right]$ , της εφαπτομενικής συνιστώσας  $\left[ \frac{a_\gamma}{(v/l)^2} \right]$

χωρίς το μείον] και του πηλίκου τους  $\left[ \tan \theta \right]$  σε συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  για όλα τα σημεία της ράβδου

Η γωνιακή επιτάχυνση, παρακάμπτοντας την παραγωγή της  $\omega$ , μπορεί να προσδιοριστεί στηριζόμενοι στο γεγονός ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του Α πρέπει να είναι μηδενική πράγμα που συνεπάγεται ότι η εφαπτομενική συνιστώσα πρέπει να έχει αντίθετη φορά της ταχύτητάς του (πρόκειται για επιβράδυνση). Έτσι η κατακόρυφη συνιστώσα της ακτινικής επιτάχυνσης θα είναι αντίθετη της αντίστοιχης της εφαπτομενικής. Έχουμε:

$$\omega^2 l \cos \theta = l a_\gamma \sin \theta \rightarrow a_\gamma = \omega^2 \cot \theta = \left( \frac{v}{l \sin \theta} \right)^2 \cot \theta = \left( \frac{v}{l} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \dots$$

