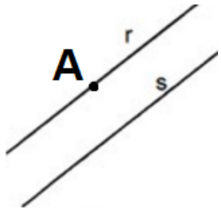
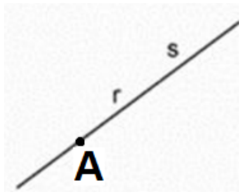
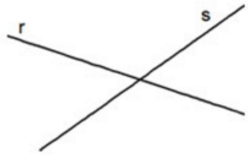
Posiciones relativas de dos rectas

Cuando tenemos dos rectas en el plano, únicamente se pueden dar las siguientes situaciones:

PARALELAS	COINCIDENTES	SECANTES
 $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s} \;\; y \;\; A\in r \to A\notin s$ ó Si r: y = mx + n, s: y = m´x + n´ m = m´ y n ≠ n´ ó Si r: ax + by + c = 0, s: a´x + b´y + c´ = 0, $\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}\neq\frac{c}{c´}$	 $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s} \;\; y \;\; A\in r \to A\in s$ ó Si r: y = mx + n, s: y = m´x + n´ m = m´ y n = n´ ó Si r: ax + by + c = 0, s: a´x + b´y + c´ = 0, $\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}=\frac{c}{c´}$	 $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$ ó Si r: y = mx + n, s: y = m´x + n´ m ≠ m´ ó Si r: ax + by + c = 0, s: a´x + b´y + c´ = 0, $\frac{a}{a´}\neq\frac{b}{b´}$

Cuando las rectas son secantes pueden ser perpendiculares o no serlo.

En el caso de que r y s sean secantes, para calcular el punto donde se cortan se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas

Ejemplos:

1) $r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-2+3\lambda\end{cases}\quad s: 6x+2y+1=0 \Rightarrow \begin{matrix}\vec{d_r}=(-1,\,3)\\ \vec{d_s}=(-2,\,6)\parallel(-1,\,3)\end{matrix}.\ \text{Como}\ \begin{matrix}A(1,-2)\in r\\ 6.1+2.(-2)+1\neq 0\to A\notin s\end{matrix}\Rightarrow r\parallel s$

2) $r:-9x+6y-15=0\quad s: 6x-4y+10=0\Rightarrow \text{Como}\ \frac{-9}{6}=\frac{6}{-4}=\frac{-15}{10},\ r=s$

$r: y=5x-4\quad s: y=-5x-4\Rightarrow \begin{matrix}m_r=5\\ m_s=-5\end{matrix}.\ \text{Como}\ m_r\neq m_s,\ r\ y\ s\ \text{son secantes}$

3) $\text{Punto de corte}:\begin{cases}y=5x-4\\ y=-5x-4\end{cases}\Rightarrow 5x-4=-5x-4\Rightarrow \begin{matrix}x=0\\ y=-4\end{matrix}.\Rightarrow P(0,\,-4)$

$$r:\begin{cases}x=1-3\lambda\\ y=2+\lambda\end{cases}\quad s:\begin{cases}x=2+\mu\\ y=-5+3\mu\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}\vec{d_r}=(-3,1)\\ \vec{d_s}=(1,3)\end{matrix}\Rightarrow \vec{d_r}\nparallel\vec{d_s}$$. Hallemos el punto P de corte

$$\begin{cases}1-3\lambda=2+\mu\\ 2+\lambda=-5+3\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3\lambda+\mu=-1).3\\ \lambda-3\mu=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9\lambda+3\mu=-3\\ \lambda-3\mu=-7\end{cases}$$

Sumando las ecuaciones $10\lambda=-10\rightarrow\lambda=-1$. Sustituyendo, $-1-3\mu=-7\rightarrow\mu=2$

4) Sustituimos ahora en las ecuaciones de r (o en las de s): $\begin{cases}x=1-3(-1)\\ y=2+(-1)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}\rightarrow P(4,1)$

<u>Actividades</u>

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y determina su punto de corte en los casos en que las rectas sean secantes:

a) $\begin{cases}2x-2y+4=0\\ 3x-3y+8=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-2y+5=0\\ -2x+4y-10=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-2y-4=0\\ 2x+5y-17=0\end{cases}$

a) $\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}\neq\frac{4}{8}\quad\Rightarrow$ r y s son paralelas.

b) $\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{5}{-10}$ r y s son coincidentes.

c) $\frac{1}{2}\neq\frac{-2}{5}$ r y s son secantes.

Se halla el punto de corte resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas:

$$\begin{cases}x-2y-4=0\\ 2x+5y-17=0\end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{matrix}x=6\\ y=1\end{matrix}\right\}\quad\Rightarrow\quad P(6,1)$$

****

Estudia la posición relativa r: mx − (2m − 2)y + 1 = 0 y s: (8m − 3)x + (2 − 10m)y − 1 = 0 según los valores del parámetro m.

<u>Resolución</u>:

$$\frac{m}{8m-3}=\frac{-2m+2}{2-10m}\Leftrightarrow m(2-10m)=(8m-3)(-2m+2)\rightarrow 2m-10m^2=-16m^2+22m-6$$

$$6m^2-20m+6=0\rightarrow \begin{matrix}m=3\\ m=\frac{1}{3}\end{matrix}.$$

Si $m=3\rightarrow\frac{3}{21}=\frac{-4}{-18}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow r\parallel s$

Si $m=\frac{1}{3}\rightarrow\frac{1/3}{-1/3}=\frac{4/3}{-4/3}=\frac{1}{-1}\Rightarrow r=s$

Si $m\neq 3$ y $m\neq\frac{1}{3}\Rightarrow$ r y s son secantes.

****

Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas y determina su punto de corte en caso de que sean secantes:

a) $r:\begin{cases}x=1-5\lambda\\ y=2\lambda\end{cases}\quad s:\begin{cases}x=2+3\mu\\ y=-4\end{cases}$ b) $r:\frac{x+4}{3}=y+7\quad s:\begin{cases}x=2+3\lambda\\ y=-5+\lambda\end{cases}$ c) $r:\begin{cases}x=-3\lambda\\ y=7\lambda\end{cases}\quad s:x+y-8=0$

d) $r: \frac{x-2}{10} = \frac{y+5}{-15} \quad s: 21x + 14y + 32 = 0$ e) $r: 2x - 12y + 3 = 0 \quad s: y = -6x + 5$ f) $r: y = 2x - 5, \quad s: y = 2x + 3$

Solución: a) $\vec{d_r} = (-5, 2) \nparallel \vec{d_s} = (3, 0)$ ⇒ r y s son secantes

$$\begin{cases} 1 - 5\lambda = 2 + 3\mu \\ 2\lambda = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 5.(-2) = 2 + 3\mu \to \mu = 3 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 - 5.(-2) = 11 \\ y = 2.(-2) = -4 \end{matrix}$$

. Se cortan en el punto (11, −4)

b) $\vec{d_r} = (3, 1) \parallel \vec{d_s} = (3, 1)$ y A(2, −5) ∈ s. Y también A ∈ r porque cumple su ecuación: $\frac{2+4}{3} = -5 + 7$
⇒ r y s son coincidentes

c) $\vec{d_r} = (-3, 7) \nparallel \vec{d_s} = (-b, a) = (-1, 1)$ ⇒ r y s son secantes

$$\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases}, \quad x + y - 8 = 0 \Rightarrow -3\lambda + 7\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x = -3.2 = -6 \\ y = 7.2 = 14 \end{matrix}$$

. Se cortan en el punto (−6, 14)

d) $\vec{d_r} = (10, -15) \parallel \vec{d_s} = (-b, a) = (-14, 21)$ y A(2, −5) ∈ r. Pero A ∉ s porque no cumple su ecuación:
21.2 + 14.(-5) + 32 ≠ 0 ⇒ r y s son paralelas

e) $\vec{d_r} = (12, 2) \nparallel \vec{d_s} = (1, -6)$ ⇒ r y s son secantes

$$\begin{cases} 2x - 12y + 3 = 0 \\ y = -6x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 12(-6x + 5) + 3 = 0 \Rightarrow 2x + 72x - 60 + 3 = 0$$

$$x = \frac{57}{74} \Rightarrow y = -6\frac{57}{74} + 5 = \frac{14}{37}$$

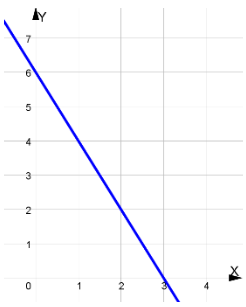
⇒ Se cortan en el punto $\left(\frac{57}{74}, \frac{14}{37}\right)$

f) Como tiene la misma pendiente, 2, pero distinta ordenada en el origen, −5 y 3 ⇒ son paralelas
****

Calcula el área de la región que determina la recta $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ al cortar a los ejes de coordenadas.

Solución: punto de corte de r con el eje X: $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{0}{6} = 1 \Rightarrow x = 3$. Punto (3, 0)

punto de corte de r con el eje Y: $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{3} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow y = 6$. Punto (0, 6)



El área es $\frac{\text{base. altura}}{2} = \frac{6.3}{2} = 9 \text{ u}^2$.

****

Estudia si las rectas r y s son paralelas, secantes o coincidentes en los siguientes casos:

a) $r:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=1+5\lambda \end{cases}$, s: x + y – 2 = 0

$\underline{\text{Solución}}: \vec{d_r}=(3,\,5) \quad \vec{d_s}=(-b,\,a)=(-1,\,1) \Rightarrow \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \Rightarrow$ r y s son secantes

b) $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{4}$, s: y = 2x – 7

$\underline{\text{Solución}}: r: 4x-4=2y+10 \rightarrow 4x-2y-14=0 \rightarrow 4x-14=2y \rightarrow r: y=2x-7 \Rightarrow$ r y s son coincidentes

c) r: 4x – 6y + 1 = 0, s: –6x + 9y – 5 = 0

$\underline{\text{Solución}}: r: 4x+1=6y \rightarrow y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6} \qquad s: 9y=6x+5 \rightarrow y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{9} \Rightarrow$ r y s son paralelas

****

Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas y determina su punto de corte en los casos en que las rectas sean secantes:

a) $r:\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2\lambda \end{cases} \quad s:\begin{cases} x=2+3\mu \\ y=-4 \end{cases}$

$\vec{d_r}=(-5,\,2)\ ,\ \vec{d_s}=(3,\,0) \Rightarrow \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$ y $\vec{d_r}\,.\,\vec{d_s} \neq 0 \Rightarrow$ r y s son secantes.

$\begin{cases} 1-5\lambda=2+3\mu \\ 2\lambda=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda+3\mu=-1 \\ \lambda=-2 \end{cases} \Rightarrow 5(-2)+3\mu=-1 \Rightarrow \mu=3.$ Por ejemplo, para $\mu=3, \begin{cases} x=2+3.3=11 \\ y=-4 \end{cases}$

El punto de corte es $P(11,\,-4)$

b) $r: -15x+5y+7=0 \quad s: 6x-2y+5=0 \qquad \dfrac{-15}{6}=\dfrac{5}{-2}\neq\dfrac{7}{5} \Rightarrow r \parallel s$

c) $r: y=x-4 \quad s: y=x+3 \qquad \begin{matrix} m_r=1 \\ m_s=1 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} n_r=-4 \\ n_s=3 \end{matrix} \Rightarrow r \parallel s$

d) $r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=3+6\lambda \end{cases} \quad s: y=\dfrac{1}{3}x-5$

$\vec{d_r}=(-2,\,6) \rightarrow m_r=-3\ ;\ m_s=\dfrac{1}{3} \Rightarrow m_r \neq m_s \Rightarrow r \nparallel s$

Como $\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=3+6\lambda \end{cases} \Rightarrow 3+6\lambda=\dfrac{1}{3}(1-2\lambda)-5 \xrightarrow{.3} 9+18\lambda=1-2\lambda-15$

$\lambda=\dfrac{-23}{20}$. Luego, $\begin{cases} x=1-2\dfrac{-23}{20} \\ y=3+6\dfrac{-23}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=\dfrac{33}{10} \\ y=\dfrac{-39}{10} \end{matrix}$. El punto de corte es $P(\dfrac{33}{10},\,\dfrac{-39}{10})$

e) $r:\dfrac{x+4}{3}=y+7 \quad s:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-5+\lambda \end{cases}$

$\vec{d_r} = (3, 1)$ $\vec{d_s} = (3, 1)$. Como $\left. \begin{array}{l} A(2, -5) \in s \\ \frac{2+4}{3} = -5+7 \rightarrow A \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r = s$

f) $r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases}$ $s: x + y - 8 = 0$

$\vec{d_r} = (-3, 7)$ $\vec{d_s} = (-1, 1) \Rightarrow \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \Rightarrow$ r y s son secantes.

Como $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases} \Rightarrow -3\lambda + 7\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -3.2 \\ y = 7.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 14 \end{cases}$. El punto de corte es $P(-6, 14)$

g) $r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+5}{0}$ $s: y = -5$

$\vec{d_r} = (-3, 0)$, $m_r = 0$, $m_s = 0$; $\left. \begin{array}{l} A(2, -5) \in r \\ -5 = -5 \rightarrow A \in s \end{array} \right\} \Rightarrow r = s$

h) $r: \frac{x-2}{10} = \frac{y+5}{-15}$ $s: 21x + 14y + 32 = 0$

$\vec{d_r} = (10, -15)$ $\vec{d_s} = (-14, 21) \Rightarrow \vec{d_r} \parallel \vec{d_s}$, $\left. \begin{array}{l} A(2, -5) \in r \\ 21.2 + 14(-5) + 32 \neq 0 \rightarrow A \notin s \end{array} \right\} \Rightarrow r \parallel s$

i) $r: 2x - 12y + 3 = 0$ $s: y = -6x + 5$

$s: 6x + y - 5 = 0 \Rightarrow \frac{2}{6} \neq \frac{-12}{1} \Rightarrow$ r y s son secantes.

$\begin{cases} (2x - 12y + 3 = 0).\,3 \\ 6x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 36y + 9 = 0 \\ 6x + y - 5 = 0 \end{cases}$. Restando, $-37y + 14 = 0 \rightarrow y = \frac{14}{37}$

$\begin{cases} 2x - 12y + 3 = 0 \\ (6x + y - 5 = 0).12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 12y + 3 = 0 \\ 72x + 12y - 60 = 0 \end{cases}$. Sumando, $74x - 57 = 0 \rightarrow x = \frac{57}{74}$

El punto de corte es $P(\frac{57}{74}, \frac{14}{37})$

r: –6x + 3y +12 = 0 y s: 2x – y + 5 = 0

<u>Solución</u> : *$r: 3y = 6x - 12 \rightarrow y = 2x - 4$; $s: 2x + 5 = y \rightarrow y = 2x + 5$. Por tanto, r y s son paralelas porque tienen la misma pendiente (que es 2) y distinta ordenada en el origen (-4 y 5, respectivamente)*

r: –6x + 3y + 12 = 0 y s: 2x – 3y + 12 = 0

r: –6x + 9y – 3 = 0 y s: 2x – 3y + 1 = 0

a) $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ -2x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$ *<u>Sol.</u>: coincidentes* b) $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + 5y - 17 = 0 \end{cases}$ *<u>Sol.</u>: secantes en $P(6,1)$*

c) $\begin{cases} 2x - 2y + 4 = 0 \\ 3x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$ *<u>Sol.</u>: paralelas* d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ *<u>Sol.</u>: paralelas* e) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$ *<u>Sol.</u>: secantes en $P(-8,-23)$*

f) $\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ y=2x \end{cases}$ $\underline{Sol.}$: sec*antes en* $P(5,10)$

****

Averigua qué rectas r: y – 3 = 5(x – 1) $s: y=\dfrac{2x}{5}$ $t: \dfrac{x+1}{5}=\dfrac{1-y}{2}$ son paralelas a u: 2x – 5y + 4 = 0

$\vec{d}_u=(5,2)$, $m_u=\dfrac{2}{5} \Rightarrow$ como $m_r=5$ y $\vec{d}_t=(5,-2)$, r y t $\nparallel$ u.

Como $m_s=\dfrac{2}{5}$ y $(0,0)\in s$ pero $(0,0)\notin u \Rightarrow s \parallel u$

****

Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la recta (en sus distintas formas)

****

Explica la condición que han de verificar A y B si las rectas de ecuaciones $Ax+By+C=0$ y $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$ son paralelas

Solución: a) -2B + 3A = 0

****

Determina el valor de a para que la recta x – 5ay = 1 y la recta 2x + 3y = 1 sean paralelas

Solución: $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-5a}{3}$ ⇒ a = -3/10

****

Calcula el valor del parámetro "a" para que las rectas r: $\dfrac{x+3}{a}=\dfrac{y-1}{-4}$, s: $\begin{cases} x=2-6t \\ y=1+3t \end{cases}$ sean paralelas

****

Determina el valor de m para que las rectas r: 5x – y + 4 = 0 , s: $\begin{cases} x=-3+m\lambda \\ y=4-\lambda \end{cases}$ sean paralelas

Solución: $\vec{v}_r$ =(1, 5) y $\vec{v}_s$ =(m, -1). Si son paralelas: m/1 = -1/5 → m = -1/5

****

Halla el valor de k para que las rectas r: 7x – 4y + 6 = 0 , s: $\begin{cases} x=k+8 \\ y=-1+14 \end{cases}$ sean coincidentes

****

Dadas las rectas r: mx + y = 12 s: 4x – 3y = m + 5

a) Determina los valores de "m" para los que son secantes $\underline{Sol.}: m \neq \dfrac{-4}{3}$

c) Para m = 1, calcula el punto donde se cortan $\underline{Sol.}: P(6,6)$

****

Halla el valor de k para que las rectas r: 7x – 4y + 6 = 0 , s: $\begin{cases} x=8t+k \\ y=-1+14t \end{cases}$ sean coincidentes

****

Sean las rectas r: x – 5ay = 1 s: 2x + 3y = 2

a) Halla el valor de "a" para que sean coincidentes $\underline{Sol.}: a=\dfrac{-3}{10}$

c) Halla el punto de corte para a = 2 $\underline{Sol.}: P(1,0)$

****

Si r: 5x – y + 4 = 0 s: $\begin{cases} x = -12 + n\lambda \\ y = 8 - \lambda \end{cases}$

Determina el valor de "n" para que sean paralelas $\underline{Sol.}: n = \frac{-1}{5}$

****

Determina el valor de "a" para que las rectas r: ax + (a – 1)y + 1 = 0, s: 2ax + ay – 2 = 0 sean paralelas

$r \parallel s \Leftrightarrow \frac{a}{2a} = \frac{a-1}{a} \neq \frac{1}{-2} \to a^2 = 2a^2 - 2a \to a^2 - 2a = 0 \to \begin{matrix} a = 0 \text{ (imposible)} \\ a = 2 \end{matrix}$

****

Halla el valor de b para que las rectas r: 3x – 2y + 1 = 0 , s: $\begin{cases} x = 1 + 4 \\ y = b + 6 \end{cases}$ sean coincidentes $\underline{Sol.}: b = 2$

****

Determina el valor o valores del parámetro para que las rectas cumplan lo que se pide:

a) r: kx + 2y – 3 = 0 s: x +2ky + 1 = 0 sean paralelas

$r \parallel s \Leftrightarrow \frac{k}{1} = \frac{2}{2k} \neq \frac{-3}{1} \to 2k^2 = 2 \to k = \pm 1$

b) r: nx – 2y – 4n = 0, s: x – 3y – 4 = 0 sean coincidentes

$r = s \Leftrightarrow \frac{n}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4n}{-4} \to n = \frac{2}{3}$

c) r: (2m – 2)x – y + 2m = 0 , s: (m – 1)x + (m + 1)y – 17 = 0 sean paralelas

$r \parallel s \Leftrightarrow \frac{2m-2}{m-1} = \frac{-1}{m+1} \neq \frac{2m}{-17} \to (2m-2)(m+1) = -m + 1 \to 2m^2 + m - 3 = 0 \to \begin{matrix} m = 1 \\ m = \frac{-3}{2} \end{matrix}$

d) La recta r: x – by = –4b – 1 sea coincidente con la recta s que pasa por los puntos A(–1, 4) y B(2, 3)

$\vec{d_s} \parallel \vec{AB} = (3, -1) \Rightarrow \vec{n_s} = (1, 3) \xrightarrow{(2,3) \in s} s: 1(x-2) + 3(y-3) = 0 \to s: x + 3y - 11 = 0$

$\text{Como } r: x - by + 4b + 1 = 0 \Rightarrow r = s \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{3}{-b} = \frac{-11}{4b+1} \to b = -3$

g) r: 3x – 5y + 2 = 0 , s: kx + 2y – 2 = 0 se corten en el punto A(1, 1)

$\left.\begin{matrix} A \in r \Leftrightarrow 3.1 - 5.1 + 2 = 0 \\ A \in s \Leftrightarrow k.1 + 2.1 - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow k = 0$

j) r : y − x + 3 = 0 s: mx + 3y − 1 = 0 no se corten

$r: y = x - 3 \;\; s: y = \frac{-m}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow r \parallel s \Leftrightarrow 1 = \frac{-m}{3} \Leftrightarrow m = -3$

****

Hallar el punto de intersección de las rectas (en sus distintas formas)
r: 2x + 3y + 3 = 0 y s: x + 2y - 2 = 0.

****

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: x – 3y + 1 = 0, s: 2x + y – 12 = 0 y por el punto P(3, –2)

$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ (2x + y - 12 = 0).3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 6x + 3y - 36 = 0 \end{cases}$. Sumando, $7x - 35 = 0$, $x = 5 \to 2.5 + y - 12 = 0 \to y = 2$.

El punto de corte es Q(5, 2). Nos piden la ecuación de la recta r que pasa por P y Q

Como $\vec{d} \parallel \vec{PQ} = (2, 4) \parallel (1, 2) \Rightarrow \vec{n} = (-2, 1) \xrightarrow{\text{pasa por } (5,2)} r: -2(x-5) + 1(y-2) = 0 \to r: -2x + y + 8 = 0$

****

Averiguar si la recta que pasa por P(1, 2) y Q(-3, 1) es paralela o si corta a la recta de ecuación x +4y = 5 en caso de ser secantes, calcular el punto de corte.

****

Encontrar la ecuación de la recta r paralela a 2x-3y =4 que pasa por el punto de intersección de las rectas s y t de ecuaciones y =3x-1 , x +2y=-3

****

Encuentra la ecuación de la recta que tiene por dirección el vector v(-1, 3) y pasa por el punto de corte de las rectas de ecuaciones x + y = 1 y 2x-3y = 0

****

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: x – y + 5 = 0 , s: x + y + 1 = 0 y es paralela a la recta t: 2x + y + 1 = 0

$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Sumando, } 2x+6=0,\ x=-3 \\ \text{Restando, } -2y+4=0,\ y=2 \end{matrix}$. El punto de corte es A(−3, 2). La ecuación de la recta u que pasa por A y es paralela a t, tiene vector director $\vec{d}_u = \vec{d}_t = (-1, 2) \Rightarrow u: \begin{cases} x=-3-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases}$

****

Averigua para qué valor de m las rectas r: mx – (2m – 2)y + 1 = 0 , s: (8m – 3)x + (2 – 10m)y – 1 = 0 son coincidentes.

Para que sean coincidentes se debe cumplir que $\frac{m}{8m-3} = \frac{-2m+2}{2-10m} = \frac{1}{-1} = -1$

Luego, $\begin{cases} m=-1(8m-3) \\ -2m+2=-1(2-10m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-8m+3 \to 9m=3 \to m=\frac{1}{3} \\ -2m+2=-1(2-10m) \to -2m+2=-2+10m \to 4=12m \to m=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m=\frac{1}{3}$

****

Dadas las rectas r: 2x + my - 7 = 0 y s: $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=7+nt \end{cases}$, t ∈ IR, sabemos que s pasa por el punto P(13, 8). Determina m y n si r y s son paralelas

Solución: Si P(13, 8) pertenece a s: 13 = - 3 + 5t ⇒ t =16/5

Entonces: 8 = 7 + n (16/5) ⇒ n = 5/16

Un vector director de s es (16, 1) y un vector director de r es (-m, 2)

r y s son paralelas si $\frac{-m}{16} = \frac{2}{1}$ ⇒ m = - 32

****

Determina los valores de m y n para que las rectas mx + ny – 1 = 0 , 3nx – my + 2 = 0 se corten en el punto P(-2, 3)

****

Calcula b para que la recta de ecuación x + by - 7 = 0 pase por el punto de intersección de las rectas r: (x, y) = (-7, 0) + ✦(5, 1) y s: $\begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha-4 \end{cases}$

Solución:

O trabajando en paramétricas o escribiendo las ecuaciones en forma general, se resuelve el sistema de r y s, y se obtiene que el punto de intersección es (3, 2)

Este punto debe pertenecer a la recta x + by - 7 = 0: 3 + 2b - 7 = 0 ⇒ b = 2

****

Halla las coordenadas de los vértices del triángulo determinado por las rectas:

r : x + y = -2 , s : y = 3x – 1 , t : x = 2y

****

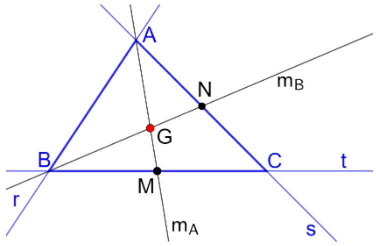
Sea ABC el triángulo cuyos lados están sobre las rectas r: 2x + y – 13 = 0, s: x – y – 2 = 0, t: y + 1 = 0.

a) Halla los vértices

$A = r \cap s: \begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(5, 3).\ B = r \cap t: \begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(7, -1).\ C = s \cap t: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, -1).$

b) Halla el perímetro

c) Calcula dos medianas (recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto) y el baricentro G (punto de corte de las medianas)



$M(4, -1),\ \vec{d} \parallel \vec{MA} = (1, 4) \Rightarrow \vec{n} = (-4, 1) \Rightarrow m_A: -4(x-4) + 1(y+1) = 0 \to -4x + y + 17 = 0$

$N(3, 1),\ \vec{d} \parallel \vec{NB} = (4, -2) \parallel (2, -1) \Rightarrow \vec{n} = (1, 2) \Rightarrow m_B: 1(x-3) + 2(y-1) = 0 \to x + 2y - 5 = 0$

$G = m_A \cap m_B: \begin{cases} -4x + y + 17 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ El baricentro es $G(\frac{-13}{3}, \frac{1}{3})$.

****

Hallar el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos A(-1, 5), B(3, 4) y C(2, 2).

****

Sean r y s las dos rectas del plano de ecuación:

r : 2x – y – 3 = 0, s: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{2}$

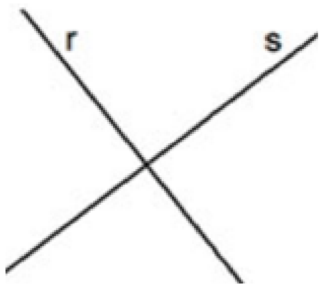
Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s, y es paralela a la recta de ecuación que pasa por los puntos (2, -1) y (-3, 2)

Solución: Se resuelve el sistema formado por las rectas r y s y obtenemos el punto de intersección P_i(1, -1).

Una recta paralela a la dada será de la forma 3x + 5y + C = 0. Imponemos que contenga el punto P_i: 3 · 1 + 5 · (-1) + C = 0 → C = 2, por lo que la recta buscada es: $3x + 5y + 2 = 0$

****

Rectas perpendiculares



Si $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ son vectores directores, r ⊥ s ⇔ $\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = 0$

Si $\vec{n_r}$ y $\vec{n_s}$ son vectores normales, r ⊥ s ⇔ $\vec{n_r} \cdot \vec{n_s} = 0$

Si r: y = mx + n, s: y = m´x + n´, r ⊥ s ⇔ mm´= –1

Si r: $ax + by + c = 0$, s: $a'x + b'y + c' = 0$, $r \perp s \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$

Ejemplos:

1) $r:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -2+3\lambda \end{cases}$ $s: 6x+2y+1=0 \Rightarrow \begin{matrix} \vec{d_r} = (-1,3) \\ \vec{d_s} = (-2,6) \parallel (-1,3) \end{matrix}$. Como $\begin{matrix} A(1,-2) \in r \\ 6.1+2.(-2)+1 \neq 0 \rightarrow A \notin s \end{matrix} \Rightarrow r \parallel s$

2) $r: -9x+6y-15=0$ $s: 6x-4y+10=0 \Rightarrow$ Como $\dfrac{-9}{6} = \dfrac{6}{-4} = \dfrac{-15}{10}$, $r = s$

3) $r: y = 5x-4$ $s: y = -5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} m_r = 5 \\ m_s = -5 \end{matrix}$. Como $m_r \neq m_s$, r y s son secantes no perpendiculares pues $m_r m_s = 5(-5) \neq -1$. Punto de corte: $\begin{cases} y = 5x-4 \\ y = -5x-4 \end{cases} \Rightarrow 5x-4 = -5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = -4 \end{matrix}$. $\Rightarrow P(0,-4)$

4) $r:\begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = 2+\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = 2+\mu \\ y = -5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{d_r} = (-3,1) \\ \vec{d_s} = (1,3) \end{matrix} \Rightarrow \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$. Como además $\vec{d_r} . \vec{d_s} = 0$ son secantes perpendiculares. Hallemos el punto P de corte $\begin{cases} 1-3\lambda = 2+\mu \\ 2+\lambda = -5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3\lambda+\mu = -1).3 \\ \lambda - 3\mu = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\lambda+3\mu = -3 \\ \lambda-3\mu = -7 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones $10\lambda = -10 \rightarrow \lambda = -1$. Sustituyendo, $-1-3\mu = -7 \rightarrow \mu = 2$

Sustituimos ahora en las ecuaciones de r (o en las de s): $\begin{cases} x = 1-3(-1) \\ y = 2+(-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow P(4,1)$

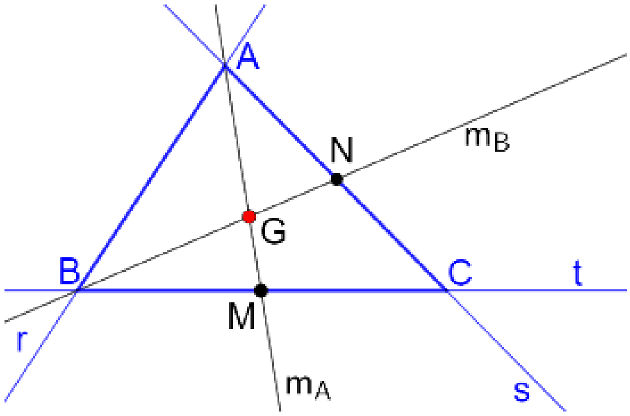
5) Sea ABC el triángulo cuyos lados están en las rectas r: $2x + y - 13 = 0$, s: $x - y - 2 = 0$, t: $y + 1 = 0$.

a) Halla los vértices

Soluc.: $A = r \cap s: \begin{cases} 2x+y-13=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow A(5,3)$. $B = r \cap t: \begin{cases} 2x+y-13=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow B(7,-1)$. $C = s \cap t: \begin{cases} x-y-2=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow C(1,-1)$.

b) Calcula dos medianas (recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto) y el baricentro G (punto de corte de las medianas)

Resolución



$M(4,-1),\ \vec{d} \parallel \vec{MA} = (1,\ 4) \Rightarrow \vec{n} = (-4,\ 1) \Rightarrow m_A: -4(x-4)+1(y+1)=0 \to -4x+y+17=0$

$N(3,1),\ \vec{d} \parallel \vec{NB} = (4,\ -2) \parallel (2,\ -1) \Rightarrow \vec{n} = (1,\ 2) \Rightarrow m_B: 1(x-3)+2(y-1)=0 \to x+2y-5=0$

$G = m_A \cap m_B: \begin{cases} -4x+y+17=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow$ El baricentro es $G(\frac{-13}{3}, \frac{1}{3})$.

Actividades

1) $r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -2+3\lambda \end{cases} \quad s: 6x+2y+1=0 \Rightarrow \begin{matrix} \vec{d_r} = (-1,\ 3) \\ \vec{d_s} = (-2,\ 6) \parallel (-1,\ 3) \end{matrix}$. Como $\begin{matrix} A(1,\ -2) \in r \\ 6.1+2.(-2)+1 \neq 0 \to A \notin s \end{matrix} \Rightarrow r \parallel s$

2) $r: -9x+6y-15=0 \quad s: 6x-4y+10=0 \Rightarrow$ Como $\frac{-9}{6} = \frac{6}{-4} = \frac{-15}{10}$, $r = s$

$r: y = 5x-4 \quad s: y = -5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} m_r = 5 \\ m_s = -5 \end{matrix}$. Como $m_r \neq m_s$, r y s son secantes

3) Punto de corte: $\begin{cases} y = 5x-4 \\ y = -5x-4 \end{cases} \Rightarrow 5x-4 = -5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = -4 \end{matrix}. \Rightarrow P(0,\ -4)$

$r: \begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = 2+\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2+\mu \\ y = -5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{d_r} = (-3,\ 1) \\ \vec{d_s} = (1,\ 3) \end{matrix} \Rightarrow \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$. Hallemos el punto P de corte

$\begin{cases} 1-3\lambda = 2+\mu \\ 2+\lambda = -5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3\lambda+\mu=-1).3 \\ \lambda-3\mu=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\lambda+3\mu=-3 \\ \lambda-3\mu=-7 \end{cases}$

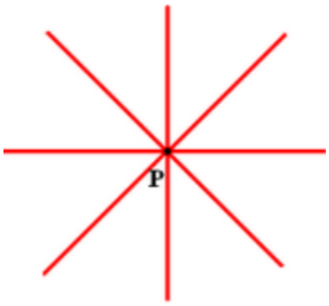
Sumando las ecuaciones $10\lambda = -10 \to \lambda = -1$. Sustituyendo, $-1-3\mu = -7 \to \mu = 2$

4) Sustituimos ahora en las ecuaciones de r (o en las de s): $\begin{cases} x = 1-3(-1) \\ y = 2+(-1) \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \to P(4,\ 1)$

****

Haz de rectas secantes

El haz de rectas secantes de base un punto dado $P(x_0, y_0)$ es el conjunto de las infinitas rectas que contienen a dicho punto. La ecuación del haz es $h_P: y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m \in \mathbb{R}$. Dando valores a m se obtienen las infinitas rectas del haz.



Si r: $ax + by + c = 0$, s: $a'x + b'y + c' = 0$ son rectas secantes, el haz de rectas que determinan r y s es $\boxed{h_{r,\,s}: \begin{array}{c} ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0,\ \text{con } k\in R \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}}$. Dando valores a k se obtienen las infinitas rectas del haz.

Ejemplos:

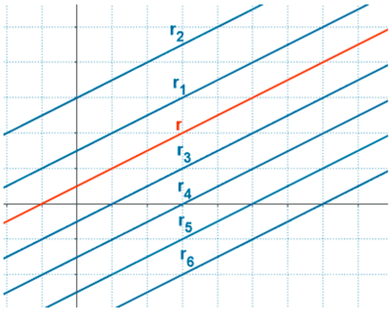
1) El haz de rectas de base el punto P(− 7, 3) es h_P: $y - 3 = m(x + 7)$, con $m \in R$

2) El haz de rectas que determinan las rectas $r: 3x+y-1=0 \quad s: -2x+5y+3=0$ es

$$\boxed{h_{r,\,s}: \begin{array}{c} 3x+y-1+k(-2x+5y+3)=0,\ \text{con } k\in R \\ -2x+5y+3=0 \end{array}}$$

Haz de rectas paralelas

El haz de rectas paralelas a una recta dada r es el conjunto de las infinitas rectas paralelas a r.



Si r: $ax + by + c = 0$, el haz de rectas paralelas a r es: $\boxed{h_r:\ ax+by+k=0,\ \text{con } k\in R}$. Dando valores a k se obtienen las infinitas rectas del haz.

Si r: $y = mx + n$, el haz de rectas paralelas a r es: $\boxed{h_r:\ y=mx+k,\ \text{con } k\in R}$. Dando valores a k se obtienen las infinitas rectas.

Ejemplos:

1) El haz de rectas paralelas a la recta r: $x - 6y + 3 = 0$ es $h_r:\ x-6y+k=0,\ \text{con } k\in R$

2) El haz de rectas paralelas a la recta r: $y = 9x + 5$ es $h_r:\ y=9x+k,\ \text{con } k\in R$

Más actividades

La recta r: $x - y + 1 = 0$ es la mediatriz del segmento AB siendo A(3, 2). Halla el punto B.

Solución: (1/3, 10/3)

****

Halla el haz de rectas de vértice el punto P(−2, 3) y determina la ecuación de la recta h del haz que tiene pendiente $\frac{-1}{2}$. *Solución:* h_P: y – 3 = m(x + 2), con m ∈ R ; h: x + 2y – 4 = 0

****

Calcula el haz de rectas determinado por las rectas r: y = 2x – 3 s: y = 3x – 5, halla su vértice V y la recta h del haz que pasa por el punto A(3, 5).

Solución

$h_{r,\,s}: \begin{array}{c} 2x-y-3+k(3x-y-5)=0,\ \text{con}\ k\in R \\ 3x-y-5=0 \end{array}$; V(2, 1) ; h: −4x + y + 7 = 0

****

Determina el haz de rectas que tienen pendiente −2 y la recta h del haz que pasa por el origen.

Solución: h_k = −2x + k, con k ∈ R ; h: y = −2x

****

Obtén el haz determinado por las rectas r: 2x + y = 0 y s: 3x – 2y = 0, halla su vértice V y la recta h del haz que tiene pendiente $\frac{-2}{3}$.

Solución

$h_{r,\,s}: \begin{array}{c} 2x+y+k(3x-2y)=0,\ \text{con}\ k\in R \\ 3x-2y=0 \end{array}$; V(0, 0) ; h: 10x – 9y = 0

****

Un rayo de luz r pasa por el punto de coordenadas (1, 2) e incide sobre el eje OX formando con éste un ángulo de 135º. Suponiendo que sobre el eje de abscisas se encuentra un espejo, hallar la ecuación del rayo r y del rayo reflejado s. *Solución:* r: y = −x + 3 s: y = x + 3

****

Halla el haz de rectas de vértice el punto P(−2, 3) y determina la ecuación de la recta del haz que tiene pendiente $\frac{-1}{2}$

El haz de rectas de base el punto P(−2, 3) es h_P: y – 3 = m(x + 2), con m ∈ R

La recta que piden se obtiene para $m=\frac{-1}{2}$: $h: y-3=\frac{-1}{2}(x+2)\xrightarrow{.\,2} 2y-6=-x-2\rightarrow h: x+2y-4=0$

****

Calcula el haz de rectas determinado por las rectas r: y = 2x – 3 s: y = 3x – 5, halla su vértice y la recta del haz que pasa por el punto A(3, 5)

Como $r: 2x-y-3=0,\quad s: 3x-y-5=0,\ h_{r,\,s}: \begin{array}{c} 2x-y-3+k(3x-y-5)=0,\ \text{con}\ k\in R \\ 3x-y-5=0 \end{array}$

Su vértice es el punto de corte de r y s: $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ 3x-y-5=0 \end{cases}\rightarrow x=2,\ y=1\rightarrow V(2,\,1)$

$A(3,\,5)\in h_{r,\,s}\Leftrightarrow 2.3-5-3+k(3.3-5-5)=0\Leftrightarrow -2-k=0\rightarrow k=-2$

Sustituyendo : $2x-y-3+(-2)(3x-y-5)=0\Rightarrow h: -4x+y+7=0$

****

Determina el haz de rectas que tienen pendiente – 2 y la recta del haz que pasa por el origen

$h_k:\ y=-2x+k,\ \text{con}\ k\in R$. La recta que piden tiene $x=0,\ y=0\Rightarrow 0=-2.0+k\rightarrow k=0\Rightarrow h: y=-2x$.

****

Obtén el haz determinado por las rectas r: 2x + y = 0 s: 3x – 2y = 0, halla su vértice y la recta del haz que tiene pendiente $\frac{-2}{3}$

$h_{r,\,s}: \begin{matrix} 2x+y+k(3x-2y)=0, \text{ con } k\in R \\ 3x-2y=0 \end{matrix}$

Su vértice es el punto de corte de r y s: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \rightarrow x=0,\ y=0 \rightarrow V(0,\,0)$

$2x+y+k(3x-2y)=0 \Rightarrow (2+3k)x+(1-2k)y=0 \Rightarrow y=\frac{-2-3k}{1-2k}x.$

Como $m=\frac{10}{9} \Rightarrow \frac{-2-3k}{1-2k}=\frac{10}{9} \Rightarrow -18-27k=10-20k \Rightarrow k=-4$

Sustituyendo : $(2+3.(-4))x+(1-2.(-4))y=0 \Rightarrow h: -10x+9y=0$

****

Un rayo de luz r pasa por el punto de coordenadas (1, 2) e incide sobre el eje OX formando con éste un ángulo de 135º. Suponiendo que sobre el eje de abscisas se encuentra un espejo, hallar la ecuación del rayo r y del rayo reflejado s.

La recta r pasa por (1, 2) y tiene pendiente $m_r = \text{tg } 135º = -1 \rightarrow r: y-2=-1(x-1) \rightarrow r: y=-x+3$

La recta s pasa por $B = r \cap$ eje $X = \begin{cases} y=-x+3 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow B(0,\,3)$ y tiene pendiente $m_s = \text{tg } 45º = 1 \rightarrow s: y-3=1(x-0) \rightarrow r: y=x+3$

****

Estudia la posición relativa r: mx – (2m – 2)y + 1 = 0 y s: (8m – 3)x + (2 – 10m)y – 1 = 0 según los valores del parámetro m.

Resolución:

$\frac{m}{8m-3}=\frac{-2m+2}{2-10m} \Leftrightarrow m(2-10m)=(8m-3)(-2m+2) \rightarrow 2m-10m^2=-16m^2+22m-6$

$6m^2-20m+6=0 \rightarrow \begin{matrix} m=3 \\ m=\frac{1}{3} \end{matrix}$

Si $m=3 \rightarrow \frac{3}{21}=\frac{-4}{-18}\neq\frac{1}{-1} \Rightarrow r \parallel s$

Si $m=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1/3}{-1/3}=\frac{4/3}{-4/3}=\frac{1}{-1} \Rightarrow r=s$

Si $m\neq 3$ y $m\neq\frac{1}{3} \Rightarrow$ r y s son secantes. Serán perpendiculares sólo cuando $m(8m-3)+(-2m+2)(2-10m)=0$

$28m^2-27m+4=0 \rightarrow m=\frac{27\pm\sqrt{281}}{56}$

****

Estudia la posición relativa de las siguientes rectas. Si son secantes, halla el punto de corte:

a) $r: \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x=2+3\mu \\ y=-4 \end{cases}$ b) $r: -15x+5y+7=0 \quad s: 6x-2y+5=0$

---

c) $r: y = x - 4 \quad s: y = x + 3$

d) $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \end{cases} \quad s: y = \dfrac{1}{3}x - 5$

e) $r: \dfrac{x+4}{3} = y + 7 \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -5 + \lambda \end{cases}$

f) $r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases} \quad s: x + y - 8 = 0$

g) $r: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+5}{0} \quad s: y = -5$

h) $r: \dfrac{x-2}{10} = \dfrac{y+5}{-15} \quad s: 21x + 14y + 32 = 0$

i) $r: 2x - 12y + 3 = 0 \quad s: y = -6x + 5$

Solución: a) secantes; P(11, −4) b) paralelas c) paralelas

d) perpendiculares; P(33/10, −39/10) e) coincidentes f) secantes; P(−6, 14)

g) coincidentes h) paralelas i) perpendiculares; P(57/74, 14/37)

****

Averigua qué rectas r: y – 3 = 5(x – 1) $s: y = \dfrac{2x}{5}$ $t: \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{1-y}{2}$ son paralelas a u: 2x – 5y + 4 = 0

Solución: Sólo la recta s

****

Determina el valor o valores del parámetro para que las rectas cumplan lo que se pide:

a) r: kx + 2y – 3 = 0 s: x +2ky + 1 = 0 sean paralelas

b) r: nx – 2y – 4n = 0, s: x – 3y – 4 = 0 sean coincidentes

c) r: (2m – 2)x – y + 2m = 0 , s: (m – 1)x + (m + 1)y – 17 = 0 sean paralelas

d) La recta r: x – by = –4b – 1 sea coincidente con la recta s que pasa por los puntos A(–1, 4) y B(2, 3)

e) r: (a – 1)x – 2y + 2a = 0, s: (3a – 4)x + y + a^2 = 0 sean perpendiculares

f) r: x – my + 2n = 0, s: 2mx + ny + 1 = 0 sean ortogonales y r pase por P(0, 2)

g) r: 3x – 5y + 2 = 0 , s: kx + 2y – 2 = 0 se corten en el punto A(1, 1)

h) $r: \begin{cases} x = -m\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad s: y = \dfrac{4}{3}x - 2$ sean perpendiculares

i) $r: \dfrac{x+1}{a} = \dfrac{y}{2} \quad s: bx - 2y + 7 = 0$ sean perpendiculares y s pase por P(–1, 2)

j) r : y − x + 3 = 0 s: mx + 3y − 1 = 0 no se corten

Solución: a) k = ±1 b) n = 2/3 c) m = 1, m = –3/2 d) b = –3 e) a = 2, a = 1/3

f) m = n = 2 g) k = 0 h) m = 3/8 i) a = –3, b = 3 j) m = –3

****

Determina el valor de "a" para que las rectas r: ax + (a – 1)y + 1 = 0, s: 2ax + ay – 2 = 0 sean:

a) paralelas b) perpendiculares. *Solución:* a) a = 2 b) a = –1

****

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: x – 3y + 1 = 0, s: 2x + y – 12 = 0 y por el punto P(3, –2). *Solución:* –2x + y + 8 = 0

****

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: x – y + 5 = 0 , s: x + y + 1 = 0 y es: a) paralela a la recta t: 2x + y + 1 = 0 b) ortogonal a la recta t: 2x + y + 1 = 0

Solución: a) 2x + y + 4 = 0 b) x – 2y + 7 = 0

****

Sea ABC el triángulo cuyos lados están en las rectas r: 2x + y – 13 = 0, s: x – y – 2 = 0, t: y + 1 = 0.

a) Halla los vértices del triángulo

b) Calcula el baricentro (punto de corte de las medianas). Una mediana es la recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

c) Calcula el circuncentro (punto de corte de las mediatrices). Una mediatriz es la recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

d) Calcula el ortocentro (punto de corte de las alturas). Una altura es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular del lado opuesto.

Solución: a) (5, 3), (7, –1), (1, –1) b) (–13/3, 1/3) c) (4, 0) d) (5, 1)

****

Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas. En caso de ser secantes, averigua si son o no perpendiculares y halla el punto donde se cortan.

a) $r:\begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = 2+3\mu \\ y = -4 \end{cases}$

$\vec{d_r} = (-5, 2)$, $\vec{d_s} = (3, 0) \Rightarrow \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$ y $\vec{d_r} \,.\, \vec{d_s} \neq 0 \Rightarrow$ r y s son secantes no perpendiculares.

$\begin{cases} 1-5\lambda = 2+3\mu \\ 2\lambda = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda+3\mu = -1 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow 5(-2)+3\mu = -1 \Rightarrow \mu = 3.$ Por ejemplo, para $\mu = 3, \begin{cases} x = 2+3.3 = 11 \\ y = -4 \end{cases}$

El punto de corte es $P(11, -4)$

b) $r: -15x+5y+7=0$ $s: 6x-2y+5=0$ $\dfrac{-15}{6} = \dfrac{5}{-2} \neq \dfrac{7}{5} \Rightarrow r \parallel s$

c) $r: y = x-4$ $s: y = x+3$ $\begin{matrix} m_r = 1 \\ m_s = 1 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} n_r = -4 \\ n_s = 3 \end{matrix} \Rightarrow r \parallel s$

d) $r:\begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 3+6\lambda \end{cases}$ $s: y = \dfrac{1}{3}x-5$

$\vec{d_r} = (-2, 6) \rightarrow m_r = -3\,;\ m_s = \dfrac{1}{3} \Rightarrow m_r \neq m_s\,;\ m_r\,.\,m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$

Como $\begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 3+6\lambda \end{cases} \Rightarrow 3+6\lambda = \dfrac{1}{3}(1-2\lambda)-5 \xrightarrow{\ .3\ } 9+18\lambda = 1-2\lambda-15$

$\lambda = \dfrac{-23}{20}$. Luego, $\begin{cases} x = 1-2\dfrac{-23}{20} \\ y = 3+6\dfrac{-23}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{33}{10} \\ y = \dfrac{-39}{10} \end{matrix}$. El punto de corte es $P(\dfrac{33}{10}, \dfrac{-39}{10})$

e) $r: \dfrac{x+4}{3} = y+7$ $s:\begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -5+\lambda \end{cases}$

$\vec{d_r} = (3, 1)$ $\vec{d_s} = (3, 1)$. Como $\begin{matrix} A(2, -5) \in s \\ \dfrac{2+4}{3} = -5+7 \rightarrow A \in r \end{matrix} \Rightarrow r = s$

f) $r:\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases}$ $s: x+y-8=0$

$\vec{d_r}=(-3,\,7)\ \ \vec{d_s}=(-1,\,1)\Rightarrow \vec{d_r}\nparallel\vec{d_s}$ y $\vec{d_r}\,.\,\vec{d_s}\neq 0\Rightarrow$ r y s son secantes no perpendiculares.

Como $\begin{cases}x=-3\lambda\\ y=7\lambda\end{cases}\Rightarrow -3\lambda+7\lambda-8=0\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow\begin{cases}x=-3.2\\ y=7.2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-6\\ y=14\end{cases}$. El punto de corte es $P(-6,\,14)$

g) $r:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+5}{0}\qquad s:y=-5$

$\vec{d_r}=(-3,\,0)\,,\ m_r=0\,,\ m_s=0\,;\ \begin{matrix}A(2,\,-5)\in r\\ -5=-5\to A\in s\end{matrix}\Rightarrow r=s$

h) $r:\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{y+5}{-15}\qquad s:21x+14y+32=0$

$\vec{d_r}=(10,\,-15)\ \ \vec{d_s}=(-14,\,21)\Rightarrow\vec{d_r}\parallel\vec{d_s}\ ,\ \begin{matrix}A(2,\,-5)\in r\\ 21.2+14(-5)+32\neq 0\to A\notin s\end{matrix}\Rightarrow r\parallel s$

i) $r:2x-12y+3=0\qquad s:y=-6x+5$

$s:6x+y-5=0\ \Rightarrow\dfrac{2}{6}\neq\dfrac{-12}{1}$ y $2.6+(-12).1=0\Rightarrow r\perp s$

$\begin{cases}(2x-12y+3=0).\,3\\ 6x+y-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-36y+9=0\\ 6x+y-5=0\end{cases}$. Restando, $-37y+14=0\to y=\dfrac{14}{37}$

$\begin{cases}2x-12y+3=0\\ (6x+y-5=0).12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-12y+3=0\\ 72x+12y-60=0\end{cases}$. Sumando, $74x-57=0\to x=\dfrac{57}{74}$

El punto de corte es $P(\dfrac{57}{74},\dfrac{14}{37})$

a) r: y = 2 – 3x $\qquad s:\begin{cases}x=5+2\lambda\\ y=1-6\lambda\end{cases}$

Como $r:3x+y-2=0\ \ \vec{n_r}=(3,\,1)\Rightarrow\vec{d_r}=(1,\,-3)$. Por otra parte, $\vec{d_s}=(2,\,-6)$. Luego, $\vec{d_r}\parallel\vec{d_s}$

y como el punto $P(5,\,1)\in s$ pero $P\notin r$ (sus coordenadas no cumplen la ecuación de r) $\Rightarrow r\parallel s$

b) r: 4(x – 1) + 3(y + 5) = 0 $\qquad$ s: 3x – 4y + 1 = 0

Como $r:4x+3y+11=0\ \ \vec{n_r}=(4,3)\Rightarrow\vec{d_r}=(-3,\,4)$. Por otra parte, $\vec{n_s}=(3,\,-4)\Rightarrow\vec{d_s}=(4,\,3)$.

Luego, $\vec{d_r}\,.\,\vec{d_s}=-12+12=0\Rightarrow r\perp s$

Punto de corte : $\begin{cases}4x+3y+11=0\\ 3x-4y+1=0\end{cases}\xrightarrow[.\,3]{.\,4}\begin{cases}16x+12y+44=0\\ 9x-12y+3=0\end{cases}$. Sumando las ecuaciones, $25x+47=0\to x=\dfrac{-47}{25}$

$\begin{cases}4x+3y+11=0\\ 3x-4y+1=0\end{cases}\xrightarrow[.\,4]{.\,3}\begin{cases}12x+9y+33=0\\ 12x-16y+4=0\end{cases}$. Restando las ecuaciones, $25y+29=0\to y=\dfrac{-29}{25}$

Luego, el punto de corte es $P\left(\dfrac{-47}{25},\dfrac{-29}{25}\right)$

a) $r:\dfrac{x+1}{3}=y\qquad s:\begin{cases}x=5+2\lambda\\ y=1-6\lambda\end{cases}$

$\vec{d_r} = (3, 1)$ y $\vec{d_s} = (2, -6)$.

Luego, $\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow r \perp s$

Como $r: x+1 = 3y \to -x+3y = 1$ y $s: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-6} \to -6(x-5) = 2(y-1) \to -6x+30 = 2y-1 \to 6x+2y = 31$

Punto de corte: $\begin{cases} -x+3y=1 \xrightarrow{\cdot 6} \\ 6x+2y=31 \end{cases} \begin{cases} -6x+18y=6 \\ 6x+2y=31 \end{cases}$. Sumando las ecuaciones, $20y = 37 \to y = \dfrac{37}{20}$

$\begin{cases} -x+3y=1 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 6x+2y=31 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} -2x+6y=2 \\ 18x+6y=93 \end{cases}$. Restando las ecuaciones, $-20x = -91 \to y = \dfrac{91}{20}$

Luego, el punto de corte es $P\left(\dfrac{37}{20}, \dfrac{91}{20}\right)$

b) r: 4(x – 1) + 2(y + 5) = 0 s: y = 3 – 2x

Como $r: 4x+2y+6 = 0 \to 2x+y+3 = 0 \Rightarrow r: y = -2x+3. \Rightarrow r = s$

****

Usando el producto escalar de vectores, averigua si las rectas r y s son perpendiculares:

a) r: (x, y) = (1, 3) + t(2, 5) s: (x, y) = (– 2, 10) + t(5, – 2)

__Solución__ *: Son perpendiculares porque el producto escalar de sus vectores de dirección vale 0:*

$$(2, 5) \cdot (5, -2) = 2.5 + 5.(-2) = 0$$

b) r: (x, y) = (1, 3) + t(2, 4) s: (x, y) = (– 2, 10) + t(5, – 2)

c) r: (x, y) = (1, 2) + t(2, 4) s: (x, y) = (– 3, 5) + t(5, – 3)

****

¿La recta que pasa por (-1, -2) y (6, 2) es perpendicular a la recta que pasa por (2, 3) y (8, -7)?

****

Dadas las rectas r: 5x – 2y = 7 s: 2x + 5y = 26.

a) Halla un vector de dirección de cada recta

b) Comprueba que las rectas son perpendiculares

c) Calcula el punto donde se cortan

****

Dadas las rectas r: 2x – 3y = 5 s: 3x + 2y = 14

a) Halla un vector de dirección de cada recta __Sol.__: $\vec{d_r} = (-b, a) = (3,2)$ $\vec{d_s} = (-b, a) = (-2,3)$

Comprueba que las rectas son perpendiculares

__Sol.__: Como $\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = 3.(-2) + 2.3 = 0$, las rectas son perpendiculares

c) Calcula el punto donde se cortan

__Sol.__: Se resuelve el sistema $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+2y=14 \end{cases}$, la solución es $x = 4$, $y = 1$; el punto de corte es $\boxed{P(4,1)}$

****

Explica la condición que han de verificar A y B si las rectas de ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$ son perpendiculares

Solución:

$\frac{A}{3} = -\frac{B}{2}$

****

Determina el valor de a para que la recta x – 5ay = 1 y la recta 2x + 3y = 1 sean perpendiculares

Solución: 1 · 2 + (-5a)·3 = 0 ⇒ a = 2/15

****

Determina el valor de m para que las rectas r: 5x – y + 4 = 0 y s: $\begin{cases} x = -3 + m\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases}$ sean perpendiculares

Solución: $\vec{v}_r$ =(1, 5) y $\vec{v}_s$ =(m, -1). Si son perpendiculares: (1, 5)·(m, -1) = 0 → m = 5

****

Averigua para qué valores de m las rectas r: mx + (2 – 2m)y + 1 = 0 ,
s: (5m – 7)x + (3 + m)y – 1 = 0 son perpendiculares.

Como $\vec{d}_r = (m, 2-2m)$ y $\vec{d}_s = (5m-7, 3+m)$, para que sean perpendiculares debe ser $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0$

$$m(5m-7)+(2-2m)(3+m)=0 \Rightarrow 5m^2-7m+6+2m-6m-2m^2=0 \Rightarrow 3m^2-11m+6=0 \Rightarrow \begin{matrix} m=3 \\ m=\frac{2}{3} \end{matrix}$$

****

Dadas las rectas r: mx + y = 12 s: 4x – 3y = m + 5

a) Determina el valor de “m” para que sean paralelas $\underline{Sol.}: m = \frac{-4}{3}$

b) Halla el valor de “m” para que sean perpendiculares $\underline{Sol.}: m = \frac{3}{4}$

c) Para m = 1, calcula el punto donde se cortan $\underline{Sol.}: P(6,6)$

****

Sean las rectas r: x – 5ay = 1 s: 2x + 3y = 2

a) Halla el valor de “a” para que sean coincidentes $\underline{Sol.}: a = \frac{-3}{10}$

b) Calcula el valor de “a” para que sean perpendiculares $\underline{Sol.}: a = \frac{2}{15}$

c) Halla el punto de corte para a = 2 $\underline{Sol.}: P(1,0)$

****

Si r: 5x – y + 4 = 0 s: $\begin{cases} x = -12 + n\lambda \\ y = 8 - \lambda \end{cases}$

a) Determina el valor de “n” para que sean paralelas $\underline{Sol.}: n = \frac{-1}{5}$

b) Halla el valor de “n” para que sean perpendiculares $\underline{Sol.}: n = 5$

c) Halla el punto de corte de r y s para el valor de n hallado en el apartado anterior $\underline{Sol.}: P(-2,6)$

****

Determina el valor de “a” para que las rectas r: ax + (a – 1)y + 1 = 0, s: 2ax + ay – 2 = 0 sean perpendiculares.

$$r \perp s \Leftrightarrow a.2+(a-1).a=0 \rightarrow 2a+a^2-a=0 \rightarrow a^2+a=0 \rightarrow \begin{matrix} a=0 \text{ (imposible)} \\ a=-1 \end{matrix}$$

****

Determina el valor o valores del parámetro para que las rectas cumplan lo que se pide:

e) r: $(a-1)x-2y+2a=0$, s: $(3a-4)x+y+a^2=0$ sean perpendiculares

$$r \perp s \Leftrightarrow (a-1)(3a-4)+(-2).1=0 \to 3a^2-7a+2=0 \to \begin{matrix} a=2 \\ a=\dfrac{1}{3} \end{matrix}$$

f) r: $x-my+2n=0$, s: $2mx+ny+1=0$ sean ortogonales y r pase por P(0, 2)

$$\begin{matrix} r \perp s \Leftrightarrow 1.2m+(-m)n=0 \\ P \in r \Leftrightarrow 0-m.2+2n=0 \end{matrix} \to \begin{cases} 2m-mn=0 \\ -2m+2n=0 \to n=m \end{cases} \Rightarrow 2m-m^2=0 \Rightarrow \begin{matrix} m=0 \to n=0 \text{(imposible)} \\ m=2 \to n=2 \end{matrix}$$

h) $r:\begin{cases} x=-m\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases}$ $\quad s: y=\dfrac{4}{3}x-2$ sean perpendiculares

$$\vec{d}_r=(-m,2),\ m_r=\frac{2}{-m},\ m_s=\frac{4}{3} \Rightarrow r \perp s \Leftrightarrow m_r m_s=-1 \Leftrightarrow \frac{2}{-m}\frac{4}{3}=-1 \Leftrightarrow \frac{8}{-3m}=-1 \to m=\frac{3}{8}$$

i) $r:\dfrac{x+1}{a}=\dfrac{y}{2}$ $\quad s: bx-2y+7=0$ sean perpendiculares y s pase por P(−1, 2)

$$\begin{matrix} r \perp s \Leftrightarrow (a,2)(2,b)=0 \\ P \in s \Leftrightarrow b(-1)-2.2+7=0 \end{matrix} \to \begin{cases} 2a+2b=0 \to a=-b \\ -b+3=0 \to b=3 \end{cases} \Rightarrow a=-3,\ b=3$$

****

Dadas las rectas r: $2x+my-7=0$ y s: $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=7+nt \end{cases}$, $t \in$ IR, sabemos que s pasa por el punto P(13, 8). Determina m y n si r y s son perpendiculares.

Solución:

Si P(13, 8) pertenece a s: 13 = - 3 + 5t ⇒ t =16/5

Entonces: 8 = 7 + n (16/5) ⇒ n = 5/16

Un vector director de s es (16, 1) y un vector director de r es (-m, 2)

r y s son perpendiculares. si (- m, 2)·(16, 1) = 0 ⇒ m = 1/8

****

Calcular el valor de a en las ecuaciones de las rectas $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$, $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ para que sean:

a) Paralelas

b) Perpendiculares

****

Halla el valor de a para que las rectas $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$ y $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ sean:

a) paralelas b) perpendiculares

****

Dadas las rectas $ax+(a-1)y+4=0$, $2ax-(2x+1)y-3=0$, halla a para que sean:

a) paralelas b) ortogonales

****

Calcula el valor de “a” y “b” para que las rectas $ax-2y+3=0$ $\quad bx+8y-5=0$ sean perpendiculares y además la segunda pase por el punto P(-4,5).

****

Las rectas $3y-mx=5$, $2y+nx=7$ son perpendiculares. Determinar “m” y “n”, sabiendo que la segunda pasa por el punto P(2,-1)

****

Determina el valor de k de modo que las rectas $kx-5y+2=0$; $-4x+8y-k=0$ sean perpendiculares.

****

Halla los valores de a y b sabiendo que las rectas r: ax – 2y = – 5 s: 4x + by = 7 son perpendiculares y r pasa por el punto (1, 3)

****

Determinar a para que las rectas r: 3ax - (a+1)y - 2(a+2) = 0 , s: (a+1)x - (a-1)y - (a+4) = 0 sean 1) paralelas 2) perpendiculares

****

Encuentra el valor de k para que las rectas r: 3kx + 8y = 5 y s: 6y – 4kx = -1 sean perpendiculares.

****

Halla el punto P en el eje X tal que la recta que pasa por P y (1, 1) sea perpendicular a la recta que pasa por P y (-3, 4).

****

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: x – y + 5 = 0 , s: x + y + 1 = 0 y es ortogonal a la recta t: 2x + y + 1 = 0

La ecuación de la recta u que pasa por A y es ortogonal a t,

tiene vector director $\vec{d_u} = \vec{n_t} = (2, 1) \Rightarrow u: \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

****

La recta r: x − y + 1 = 0 es la mediatriz del segmento AB siendo A(3, 2). Halla el punto B.

B es el simétrico de A respecto de r

$A(3, 2) \in s,\ \vec{n_s} = \vec{d_r} = (1, 1) \Rightarrow s: 1(x-3) + 2(y-2) = 0 \to s: x + 2y - 7 = 0$

$M = r \cap s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$. Como M es punto medio de AB, si llamamos B(x, y)

$\begin{matrix} \frac{x+3}{2} = \frac{5}{3} \\ \frac{y+2}{2} = \frac{8}{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{matrix}$. Luego, el punto simétrico es $B(\frac{1}{3}, \frac{10}{3})$

****

Considera la recta r: 3x + 4y – 1 = 0.

a) Calcula dos puntos A y B de la recta

b) Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a (3, 4)

c) Halla la ecuación explícita de r y comprueba que (1, m) es paralelo a $\overrightarrow{AB}$

****

Dada la recta x – 3y + 3 = 0 , calcula la recta que pasa por el punto (2 , 0) y es perpendicular a la anterior. Calcula el punto de intersección de ambas rectas.

****

Calcula la ecuación de la recta perpendicular a 3x – 4y + 6 = 0 en el punto de corte con el eje de ordenadas

****

Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3, −2) y es perpendicular a la recta r ≡ 5x – 3y + 2 = 0. Calcular también una recta paralela a r y que pase por A .

****

Dados la recta r: 2x + y – 3 = 0 y el punto (3, 5), hallar la ecuación de la recta que contiene al punto y es perpendicular a r.

****

Halla las ecuaciones de la recta en los siguientes casos:

a) Su vector de posición es a = (5, −2) y su vector direccional es perpendicular al segmento PQ, siendo P(2, 4), Q(2, 1)

b) La recta es perpendicular al segmento AB en su punto medio, siendo A(−10, 0) , B(0, 4)

****

Escribir una paralela a y = 3x + 2 que pase por (−1,4) y una perpendicular que pase por (0, 0)

****

Halla la ecuación de la recta que pasa por (–2, 3) y es perpendicular a la recta que pasa por (0, –2) y (2, 3)

****

Calcular la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada en el origen que la recta 2x - 3y + 6 = 0 y cuyo vector normal es n = (1,2)

****

Dada la ecuación de la recta r: –4x + 3y – 1 = 0. Hallar:

a) La ecuación de la recta paralela a r que pase por (–1, 3)

b) La ecuación de una recta no paralela a r y que tenga su misma ordenada al origen

c) La ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por el punto (4, –2)

d) La gráfica de todas las rectas anteriores

e) ¿La recta r es perpendicular a la recta que pasa por (–1, –4) y (3, –7)? Justifica tu respuesta

****

Comprueba que la recta que pasa por (5, –2) y (7, 4) es perpendicular a que pasa por (–3, 4) y (9, 0).

****

Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta $4x + y = 1$ que pase por el punto de intersección de las rectas $2x - 5y + 3 = 0$ y $x - 3y = 7$.

****

Dado un segmento AB donde un extremo tiene como coordenadas (–7, 1) y el punto medio del segmento es (4, –5). Por el otro extremo pasa una recta l perpendicular al segmento dado. Encontrar los puntos de intersección de la recta l con los ejes coordenados.

****

Tenemos los puntos: A(–3, –4) y B(–10, –1) que determinan un segmento en el plano. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a este segmento y que tiene b= –5 y que es perpendicular a la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio? Haz la gráfica

****

Dada una recta que intercepta los ejes coordenados, de tal manera que los segmentos determinados en los ejes X e Y son "a" y la tercera parte de éste respectivamente. Encontrar la ecuación de la recta que sea perpendicular a la recta dada y que pasa por la intersección entre el eje X y la recta dada.

****

Por el punto A (2, 6) se trazan dos rectas perpendiculares a las bisectrices del primer cuadrante y del segundo cuadrante. Hallar las ecuaciones de dichas rectas y las coordenadas de los vértices del triángulo formado por esas dos rectas y la recta de ecuación 3x – 13y = 8.

****

Halla la recta perpendicular a r: 2x – y + 3 = 0 que pasa por el origen de coordenadas y corta a la recta r en el punto (1, 5)

****

Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a r: y = 4x – 2 y su punto de corte con el eje y es –6.

****

Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta cuya ecuación es 2x – 5y + 6 = 0.

****

Dados los puntos A (0, –1) y B (1, 2), hallar las coordenadas de todos los puntos P situados sobre la recta x + y = 2 tales que las rectas PA y PB sean perpendiculares.

****

Calcular las coordenadas del pie de la perpendicular del punto (2, –6) a la recta 3y – x + 2=0.

****

En el triángulo de vértices A(1, 1), B(7, -1) y C(-3, 7), hallar la ecuación de la mediana y de la altura relativa al lado AB

****

Calcula las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices A(1, 1), B(7, -1) y C(-3, 7)

****

Probar que los puntos P (7,1), Q (-4,-1), R (4,5) son los vértices de un triángulo rectángulo.

****

Dado el triángulo de vértices P(-2,5) , Q(6,-2) , R(3,4), calcula la ecuación de
a) La altura que parte de R b) La mediana que parte de P

****

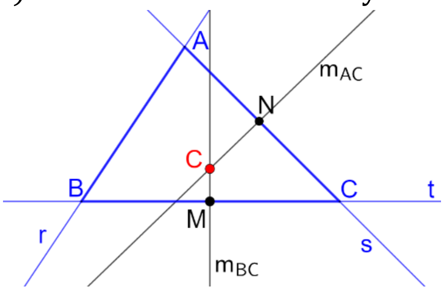
Sea ABC el triángulo cuyos lados están sobre las rectas r: 2x + y – 13 = 0, s: x – y – 2 = 0, t: y + 1 = 0.

a) Halla los vértices

$$A = r \cap s: \begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(5, 3).\ B = r \cap t: \begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(7, -1).\ C = s \cap t: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, -1).$$

b) Halla el perímetro

c) Calcula dos mediatrices y el circuncentro C (punto de corte de las mediatrices)

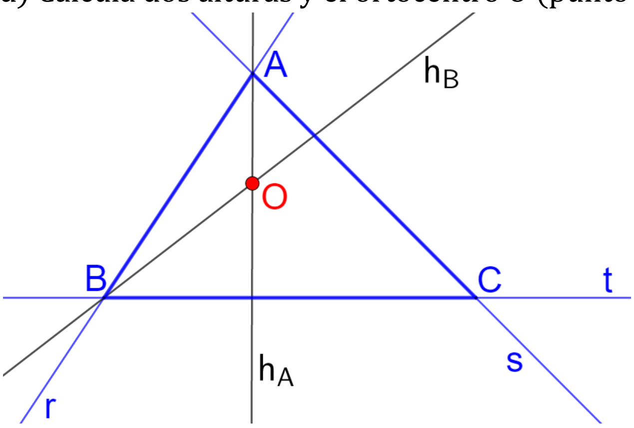


$$M(4, -1),\ \vec{n} = \vec{d_t} = (1, 0) \Rightarrow m_{BC}: 1(x-4) + 0(y+1) = 0 \rightarrow x - 4 = 0$$

$$N(3, 1),\ \vec{n} = \vec{d_s} = (1, 1) \Rightarrow m_{AC}: 1(x-3) + 1(y-1) = 0 \rightarrow x + y - 4 = 0$$

$$C = m_{BC} \cap m_{AC}: \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{El circuncentro es } C(4, 0).$$

d) Calcula dos alturas y el ortocentro O (punto de corte de las alturas)



$$A(5, 3),\ \vec{n} = \vec{d_t} = (1, 0) \Rightarrow h_A: 1(x-5) + 0(y-3) = 0 \rightarrow x - 5 = 0$$

$$B(7, -1),\ \vec{n} = \vec{d_s} = (1, 1) \Rightarrow h_B: 1(x-7) + 1(y+1) = 0 \rightarrow x + y - 6 = 0$$

$$O = h_A \cap h_{BB}: \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{El ortocentro es } O(5, 1).$$

****

Considera la recta de ecuación y = -7x + 5. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la recta perpendicular a ella que pasa por el punto (-7, 5).

Solución:

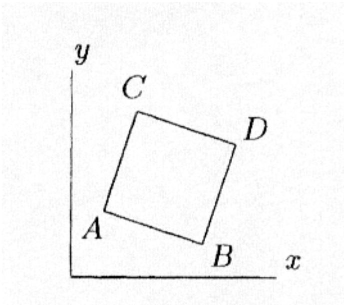
Una recta perpendicular es de la forma: y = (1/7) x + b
Debe pasar por (-7, 5): 5 = (1/7)·(-7) + b ⇒ b = 6
Luego la recta perpendicular es y = (1/7)x + 6

P_i $\begin{cases} y = -7x + 5 \\ y = \dfrac{x}{7} + 6 \end{cases}$ ⇒ x = -7/50 y = 299/50

El punto es P_i(-7/50, 299/50)

****

Los puntos A(1, 2) y D(5, 4) representan los vértices opuestos de un cuadrado, tal como se indica en la figura.



a) Calcula el punto medio M de la diagonal AD del cuadrado (M será el centro del cuadrado).
b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular a la diagonal AD
c) Calcula las coordenadas de los otros dos vértices B y C del cuadrado.

Solución:

a) M(3, 3)

b) $\vec{AD}$ = (4, 2), luego la recta pedida es de la forma 4x + 2y + c = 0

Puesto que contiene M(3, 3): 4 · 3 + 2 · 3 + c = 0 ⇒ c = -18

La recta pedida es 4x + 2y - 18 = 0 ⇒ 2 x + y - 9 = 0

c) El vector $\vec{AM}$ = (2, 1). Dos vectores perpendiculares y del mismo módulo son:

u = (-1, 2) y v = (1, -2)

Luego los puntos B y C son (3 - 1, 3 + 2) = (2, 5) y (3 + 1,3 - 2) = (4, 1)

En concreto, B(4, 1) y C(2, 5), porque B debe estar a la derecha y hacia abajo respecto de M

****

De un rombo ABCD conocemos las coordenadas de tres vértices: A es el origen de coordenadas, B(4, 1) y D(1, 4).

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice, C
b) Comprueba, analíticamente que les diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio

Solución:

a) $\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow$ (1 , 4) = (x -4, y - 1) ⇒ x = 5, y = 5 , luego C(5, 5)

b) $\vec{AC} \cdot \vec{BD} =$ (5, 5) · (-3, 3) = -15 + 15 = 0 ⇒ $\vec{AC} \perp \vec{BD}$, luego las diagonales son perpendiculares

El punto medio de una de las diagonales es: M(5/2, 5/2)

Comprobamos que las rectas que contienen A y C y B y D, se cortan en el mismo punto:

Recta que pasa por A y C: y = x

Recta que pasa por B y D: x + y = 5

Su punto de intersección P_i: $\begin{cases} y = x \\ x + y = 5 \end{cases}$ ⇒ P_i(5/2, 5/2)

****

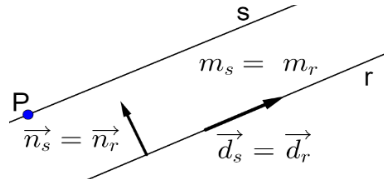
PROBLEMAS AFINES

1) Ecuación de la recta que pasa por un punto y forma un ángulo determinado con OX.

Ejemplo: Hallemos la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, – 2) y forma un ángulo de 60º con la horizontal:

La pendiente es $m = \text{tg } 60º = \sqrt{3}$. Luego, la ecuación punto – pendiente es $y + 2 = \sqrt{3}\,(x - 1)$

2) Ecuación de la recta s que pasa por un punto P y es paralela a otra recta r.



Tomamos como vector director de s el vector director de r o cualquier proporcional a él.
Las rectas r y s tendrán, por tanto, la misma pendiente y el mismo vector normal.

Ejemplos:

1) Ecuación general de la recta s paralela a $r: 2x - y + 4 = 0$ por el punto P(3, – 5)

$$\vec{n_s} \parallel \vec{n_r} = (2,-1) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: 2(x-3) + (-1)(y+5) = 0 \Rightarrow s: 2x - y - 11 = 0$$

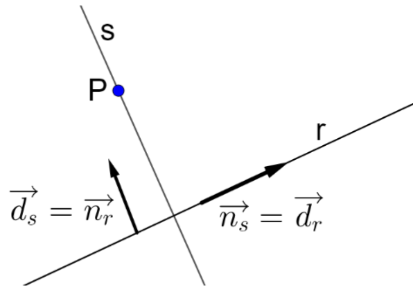
2) Ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a $r: x - 2 = \dfrac{y+7}{6}$ por el punto P(1, 0)

$$\vec{d_s} \parallel \vec{d_r} = (1,6) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 6\lambda \end{cases}$$

3) Ecuación explícita de la recta s paralela a $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \end{cases}$ por el punto P(1, 6)

$$\vec{d_s} \parallel \vec{d_r} = (-1,5) \Rightarrow m_s = m_r = \frac{5}{-1} = -5 \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: y - 6 = -5(x-1) \Rightarrow s: y = -5x + 11$$

3) Ecuación de la recta s que pasa por un punto P y es ortogonal a otra recta r.



Tomamos como vector director de s el vector normal de r o cualquier proporcional a él. Recíprocamente, el vector normal de s será vector director de r.

Ejemplos:

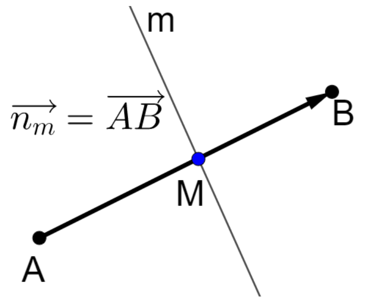
1) Hallar la ecuación continua de la recta s perpendicular a $r: 2x - y + 4 = 0$ por el punto P(1, –2)

$$\vec{d_s} \parallel \vec{n_r} = (2,-1) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1}$$

2) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta s ortogonal a r: $y = 3x + 1$ por el punto P(7, – 4)

$$\text{Como } r: 3x - y + 1 = 0,\ \vec{n_r} = (3,-1) \Rightarrow \vec{d_s} \parallel \vec{n_r} = (3,-1) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -4 - \lambda \end{cases}$$

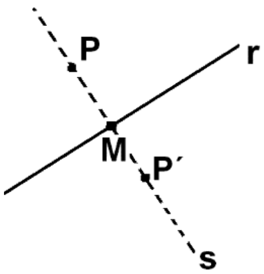
4) Ecuación de la mediatriz m de un segmento AB (recta que pasa por su punto medio M y es perpendicular al segmento)



Tomamos como vector normal de m el vector $\overrightarrow{AB}$ o cualquier proporcional a él.

<u>Simétrico de un punto respecto de una recta</u>

El punto simétrico de un punto P respecto de una recta r es el punto P´ del dibujo que cumple $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$ y $\overline{PP'} \perp r$, siendo M el punto medio de PP´



Para calcular el punto simétrico P´:

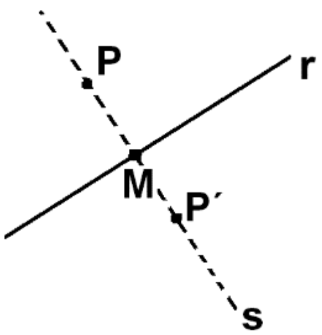
1º) Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por P y es perpendicular a r

2º) Calculamos el punto de corte M de r y s (resolviendo el sistema con las ecuaciones de r y s)

3º) Usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, podemos hallar P´ fácilmente

<u>Actividad resuelta</u>

Calcular el simétrico del punto P respecto de la recta en los siguientes casos



a) P(1, 1), r: y = 3x – 7

<u>Resolución</u>

$P(1, 1) \in s,\ \vec{n_s} = \vec{d_r} = (1, 3) \Rightarrow s: 1(x-1) + 3(y-1) = 0 \rightarrow s: x + 3y - 4 = 0$

$M = r \cap s: \begin{cases} y = 3x - 7 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Como M es punto medio de PP´, si llamamos P´(x, y)

$\begin{matrix} \frac{x+1}{2} = \frac{5}{2} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 0 \end{matrix}$. Luego, el punto simétrico es P´(4, 0)

b) P(0, 6), r: y = 2x – 3

Resolución

$P(0, 6) \in s,\ \vec{n_s} = \vec{d_r} = (1, 2) \Rightarrow s: 1(x-0) + 2(y-6) = 0 \rightarrow s: x + 2y - 12 = 0$

$M = r \cap s: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{18}{5}, \frac{21}{5})$. Como M es punto medio de PP´, si llamamos P´(x, y)

$\begin{matrix} \frac{x+0}{2} = \frac{18}{5} \\ \frac{y+6}{2} = \frac{21}{5} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{36}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{matrix}$. Luego, el punto simétrico es $P´(\frac{36}{5}, \frac{12}{5})$

c) P(1, 5) y la bisectriz del I y III cuadrante

Resolución

$r = \text{bisectriz}: y = x.\ \ P(1, 5) \in s,\ \vec{n_s} = \vec{d_r} = (1, 1) \Rightarrow s: 1(x-1) + 1(y-5) = 0 \rightarrow s: x + y - 6 = 0$

$M = r \cap s: \begin{cases} y = x \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3, 3)$. Como M es punto medio de PP´, si llamamos P´(x, y)

$\begin{matrix} \frac{x+1}{2} = 3 \\ \frac{y+5}{2} = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 5 \\ y = 1 \end{matrix}$. Luego, el punto simétrico es P´(5, 1)

<u>Más actividades</u>

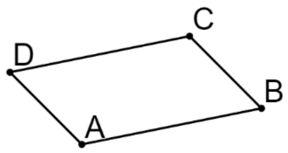
Averiguar el valor de m para que estén alineados los puntos P(1, 4), Q(5, –2) y R(6, m)

P, Q y R están alineados $\Leftrightarrow \vec{PR} = \lambda \vec{PQ} \Leftrightarrow (5, m-4) = \lambda(4, -6) \Leftrightarrow \begin{matrix} 5 = 4\lambda \rightarrow \lambda = \frac{5}{4} \\ m - 4 = -6\lambda \rightarrow \lambda = \frac{m-4}{-6} \end{matrix}$.

Luego, para que estén alineados $\frac{5}{4} = \frac{m-4}{-6} \rightarrow -30 = 4m - 16 \rightarrow -14 = 4m \rightarrow m = \frac{-14}{4} = \frac{-7}{2}$

****

Los puntos A(1, 0), B(6, 1) y C(4, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Determina las coordenadas del cuarto vértice



Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{d} = \vec{c} - \overrightarrow{AB} = (4, 3) - (5, 1) = (-1, 2)$. Luego, $D(-1, 2)$

****

Si $\overrightarrow{AB} = (-5, -2)$ y B(3, 6), ¿cuáles son las coordenadas de A? *Solución:* A(8, 8)

****

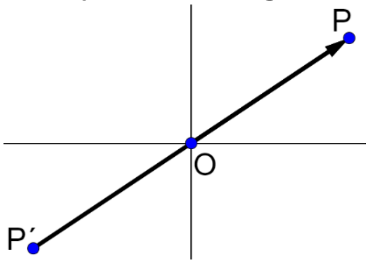
¿Qué coordenadas debe tener el punto P para que $3\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PR} = \vec{0}$, siendo Q(3, 2) y R(−1, 5)?
Solución: P(11, −4)

****

Halla el simétrico del punto A(2, 3) respecto de P(5, 4). *Solución:* A´(8, 5)

****

Sea el triángulo de vértices A (−1, 3), B (2, −1) y C (4, 1), calcula las coordenadas de los vértices A´, B´ y C´ del triángulo simétrico respecto del origen de coordenadas.



Observa: Si $P'(x, y)$ es el simétrico de $P(a, b)$ respecto de $O(0, 0) \Rightarrow \overrightarrow{P'P} = 2\,\overrightarrow{OP}$

$$(a - x, b - y) = 2(a, b) \Rightarrow \begin{cases} a - x = 2a \to x = -a \\ b - y = 2b \to y = -b \end{cases} \Rightarrow P'(-a, -b)$$

Luego, $A'(1, -3)$, $B'(-2, 1)$ y $C'(-4, -1)$

Averigua si los puntos A(−4, −2), B(−1, −1) y C(5, 1) están alineados. *Solución:* Sí, están alineados

****

Calcular el simétrico del punto P respecto de la recta en los siguientes casos:
a) P(1, 1), r: y = 3x – 7 b) P(0, 6), r: y = 2x – 3 c) P(1, 5) y la bisectriz del I y III cuadrante

Solución: a) (4, 0) b) (36/5, 12/5) c) (5, 1)

****

****

Halla las coordenadas del punto simétrico de P(3, 4) respecto a la recta r: 3x + y + 2 = 0.

****

Hallar las coordenadas del simétrico del punto P(0, 6) respecto de la recta y = 2x – 3.

****

Sabiendo que los puntos P(5, −2) y P’(−7, 6) son simétricos respecto de una recta, hallar la ecuación de dicha recta.

****

Calcula el punto simétrico de A(0, 4) respecto de la recta 3x - y + 1 = 0.
Solución: Primero calculemos la proyección ortogonal de A sobre la recta r. Para ello necesitamos calcular la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por A.
Una perpendicular cualquiera es de la forma x + 3y + C = 0. Imponemos que contenga el punto A:
$1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + C = 0 \to C = -12$
Por tanto la recta buscada perpendicular a r que pasa por A es x + 3y - 12 = 0
Ahora buscamos la proyección de A sobre r resolviendo el sistema y obtenemos $A_0(9/10, 37/10)$.

Esta proyección es el punto medio entre A y su simétrico, por tanto podemos escribir:

$\frac{9}{10} = \frac{0+x}{2} \rightarrow x = \frac{9}{5}$,

$\frac{37}{10} = \frac{4+y}{2} \rightarrow y = \frac{17}{5}$.

El punto simétrico es A'(9/5, 17/5)

****

Calcula el punto simétrico de A(-2, -1) respecto de la recta r: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}$. t ∈ IR

Solución: Primero calculemos la proyección ortogonal de A sobre la recta r. Para ello necesitamos calcular la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por A.

Una perpendicular cualquiera es de la forma 3x - 5y + C = 0, puesto que un vector director de r es (3, -5)

Imponemos que contenga el punto A:

3 · (-2) - 5 · (-1) + C = 0 →C = 1

Por tanto la recta buscada perpendicular a r que pasa por A es 3x - 5y + 1 = 0

Ahora buscamos la proyección de A sobre r resolviendo el sistema y obtenemos $A_0(3, 2)$.

Esta proyección es el punto medio entre A y su simétrico, por tanto, podemos escribir:

$3 = \frac{-2+x}{2} \rightarrow x = 8$,

$2 = \frac{-1+y}{2} \rightarrow y = 5$.

El punto simétrico es A'(8, 5)

****