

Тема: Логарифмічні нерівності

<https://youtu.be/Xai4vjInjLE>

Мета:

- *Навчальна:* розглянути приклади логарифмічних нерівностей та найпростіших логарифмічних нерівностей, навчитися розв'язувати найпростіші та більш складні логарифмічні нерівності;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати логарифмічні нерівності різними способами;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

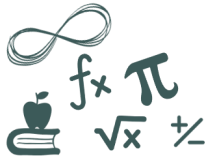
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

III. Вивчення нового матеріалу

$$x > -3(2x - 3) = (x + 7)(x^2 + 4x + 3) = 3 \mid \text{Логарифмічні нерівності містять змінну тільки під знаком логарифма}$$

Найпростіші логарифмічні нерівності $|x > b, x < b, x \geq b, x \leq b$ ($a > 0, a \neq 1, b$ – число)



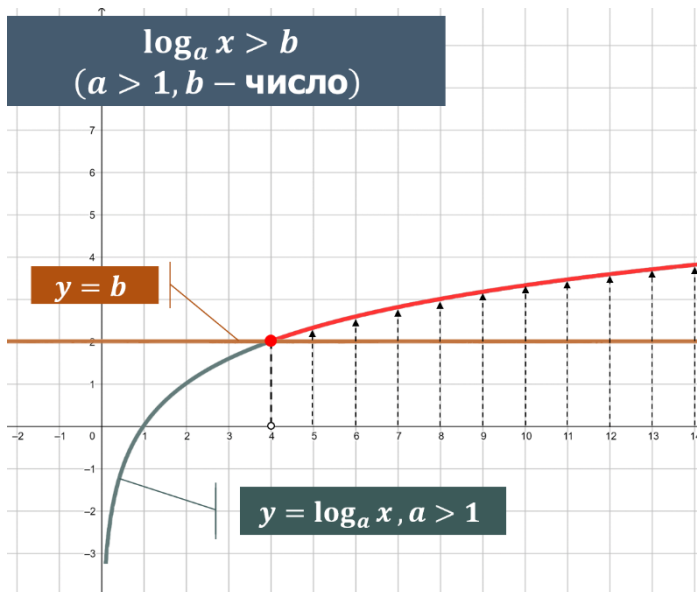
● Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей

- Розглянемо найпростішу логарифмічну нерівність:

$$x > b, a > 1, b - \text{число}$$

Нехай $b = a^b \Rightarrow x > a^b$.

Виконаємо побудову графіків:



Більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, отже:

$$x > a^b \Rightarrow x > a^b$$

Знак нерівності не змінюється

- Чи буде виконуватися умова ОДЗ нерівності?

$$a^b > 0 \quad \forall a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R} \quad x > a^b \mid \Rightarrow x > 0 \quad \frac{\text{Отже, умова ОДЗ виконується}}{\text{виконується}}$$

- Розв'яжіть цю логарифмічну нерівність:

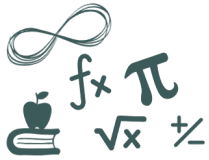
$$x > 2$$

$$x > 4^2 \quad (\text{Так як } 2 = 4^2)$$

$$x > 4^2 \quad (\text{Так як нерівність } x > 4^2 \text{ рівносильна нерівності } x > 4^2)$$

$$x > 16$$

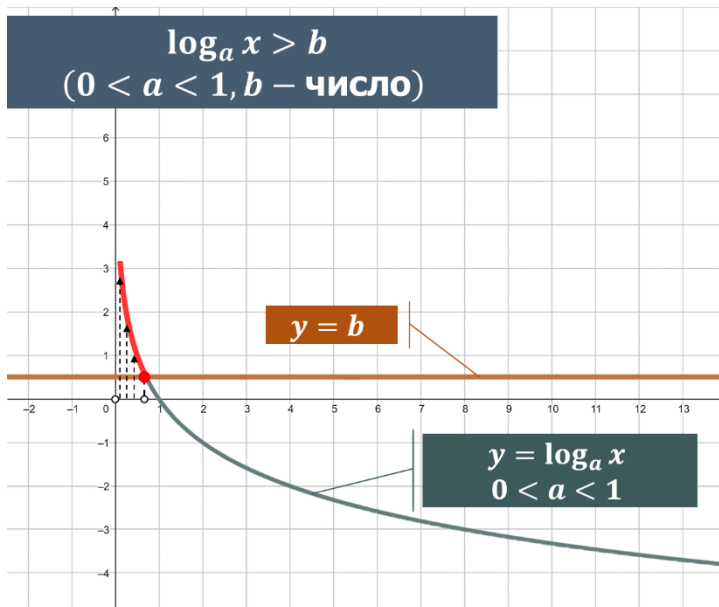
$$\text{Відповідь: } x \in (16; +\infty)$$



- ☐ Розглянемо найпростішу логарифмічну нерівність $x > b$ у випадку $0 < a < 1$, b – число.

Нехай $b = a^b \Rightarrow x > a^b$.

Виконаємо побудову графіків:



Більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, отже:

$$x > a^b \Rightarrow x < a^b$$

Знак нерівності змінюється на протилежний

- ☐ Чи буде виконуватися умова ОДЗ нерівності?

$x < a^b$ ОДЗ: $x > 0 \mid \Rightarrow 0 < x < a^b$ Отже, якщо в отриманій нерівності немає гарантії, що $x > 0$ необхідно враховувати ОДЗ

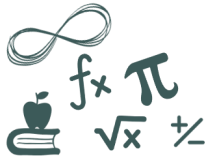
- ☐ Розв'яжіть цю логарифмічну нерівність:

$$x \geq 2$$

$$x \geq 0,16 \text{ (Так як } 2 = 0,16)$$

Отримана нерівність рівносильна системі $\{x \leq 0,16 \mid x > 0\}$

Відповідь: $x \in (0; 0,16]$



- Розв'язування нерівностей виду $|f(x) > g(x)|$ $f(x) \geq g(x)$

Теорема

Якщо $a > 1$, то нерівність $f(x) > g(x)$ рівносильна системі
$$\{f(x) > g(x) \quad g(x) > 0\}$$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $f(x) > g(x)$
рівносильна системі
$$\{f(x) < g(x) \quad f(x) > 0\}$$



$$\begin{array}{|l} f(x) > g(x) \quad a > 1 \Rightarrow \{f(x) > g(x) \quad g(x) > 0 \\ \hline f(x) > g(x) \quad 0 < a < 1 \Rightarrow \{f(x) < g(x) \quad f(x) > 0 \end{array}$$

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Розв'яжіть нерівність:

1) $x < 9$

2) $(2x - 3) > 7$

3) $x > 14$

Розв'язок:

1) $x < 9$

$x > 9$

Відповідь: $x \in (9; +\infty)$

2) $(2x - 3) > 7$

$\{2x - 3 > 7 \quad 2x - 3 > 0\} \Rightarrow \{2x > 10 \quad 2x > 3\} \Rightarrow \{x > 5 \quad x > 1,5\} \Rightarrow x > 5$

Відповідь: $x \in (5; +\infty)$

3) $x > 14$

$\{x < 14 \quad x > 0\}$

Відповідь: $x \in (0; 14)$

№2

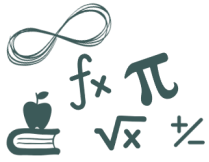
Розв'яжіть нерівність:

1) $x > 2$

2) $(x - 2) < 2$

3) $x \leq 5$

Розв'язок:



$$\begin{aligned} 1) \quad & x > 2 \\ & x > 49 \\ & x > 49 \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (49; +\infty)$

$$\begin{aligned} 2) \quad & (x - 2) < 2 \\ & (x - 2) < 0,36 \\ & \{x - 2 > 0,36 \mid x - 2 > 0\} \Rightarrow \{x > 2,36 \mid x > 2\} \Rightarrow x > 2,36 \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (2,36; +\infty)$

$$\begin{aligned} 3) \quad & x \leq 5 \\ & x \leq \frac{1}{32} \\ & x \geq \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in [\frac{1}{32}; +\infty)$

№3

Скільки цілих розв'язків має нерівність:

$$(3x - 5) > -3$$

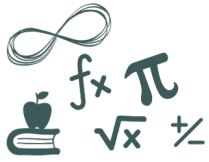
Розв'язок:

$$(3x - 5) > -3$$

$$(3x - 5) > 64$$

$$\{3x - 5 < 64 \mid 3x - 5 > 0\} \Rightarrow \{3x < 69 \mid 3x > 5\} \Rightarrow \{x < 23 \mid x > \frac{5}{3}\}$$

Відповідь: нерівність має 21 цілих розв'язків



Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg(2x + 3) > \lg(x - 1)$

2) $(2x - 1) > (3x - 4)$

Розв'язок:

1) $\lg(2x + 3) > \lg(x - 1)$

$\{2x + 3 > x - 1 \quad x - 1 > 0 \Rightarrow \{x > -4 \quad x > 1 \Rightarrow x > 1$

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$

2) $(2x - 1) > (3x - 4)$

$\{2x - 1 < 3x - 4 \quad 2x - 1 > 0 \Rightarrow \{x > 3 \quad x > \frac{1}{2} \Rightarrow x > 3$

Відповідь: $x \in (3; +\infty)$

№5

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(x^2 - 4x + 3) \leq 1$

2) $(x^2 + x) > -1$

Розв'язок:

1) $(x^2 - 4x + 3) \leq 1$

$\{x^2 - 4x + 3 \leq 8 \quad x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow \{x^2 - 4x - 5 \leq 0 \quad x^2 - 4x + 3 > 0$

$x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 4x - 5 = 0$

За теоремою Вієта

$|x_1 = -1 \quad x_2 = 5$

*Так як знак нерівності « $\leq$ », оберемо проміжок $[-1; 5]$

$x^2 - 4x + 3 > 0$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 4x + 3 = 0$

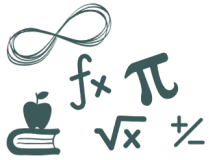
За теоремою Вієта $|x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

*Так як знак нерівності « $>$ », оберемо проміжок $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Відповідь: $[-1; 1) \cup (3; 5]$

2) $(x^2 + x) > -1$





$$(x^2 + x) > 2$$

$$\{x^2 + x < 2 \mid x^2 + x > 0\} \Rightarrow \{x^2 + x - 2 < 0 \mid x(x + 1) > 0\}$$

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

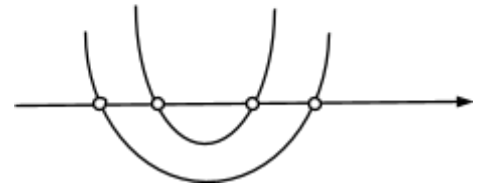
2. Нулі функції

$$f(x): x^2 + x - 2 = 0$$

За теоремою Вієта

$$|x_1 = 1 \mid x_2 = -2$$

*Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок $(-2; 1)$



$$x(x + 1) > 0$$

$$f(x) = x(x + 1)$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x): x(x + 1) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

*Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

Відповідь: $(-2; -1) \cup (0; 1)$

№6

Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x + \lg(x - 3) > 1$

2) $x + (x + 4) < 5$

3) $(5x + 8) + (x + 1) \leq 1 - 3$

Розв'язок:

1) $\lg x + \lg(x - 3) > 1$

$$\lg \lg(x(x - 3)) > \lg \lg 10$$

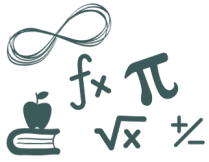
Використали теорему про логарифм добутку;
 $1 = \lg \lg 10$

$$\{x(x - 3) > 10 \mid x > 0 \mid x - 3 > 0\} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \{x^2 - 3x - 10 > 0 \mid x > 3\}$$

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

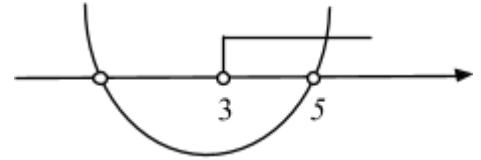


2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 3x - 10 = 0$

За теоремою Вієта

$$|x_1| = -2 \quad x_2 = 5$$

Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок
($-\infty$; -2) $\cup$ (5 ; $+\infty$)



Відповідь: (5 ; $+\infty$)

2) $x + (x + 4) < 5$

$$(x(x + 4)) < 32$$

Використали теорему про логарифм
добутку;
 $1 = \lg \lg 10$

$$\{x(x + 4) < 32 \mid x > 0 \mid \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \{x^2 + 4x - 32 < 0 \mid x > 0\}$$

$$x^2 + 4x - 32 < 0$$

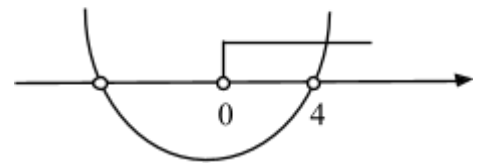
$$f(x) = x^2 + 4x - 32$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 + 4x - 32 = 0$

За теоремою Вієта $|x_1| = 4 \quad x_2 = -8$

Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок
(-8 ; -4)



Відповідь: (0 ; 4)

3) $(5x + 8) + (x + 1) \leq 1 - 3$

$$(5x + 8) + (x + 1) \leq 6 - 3$$

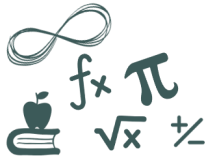
$$(5x + 8)(x + 1) \leq \frac{6}{3}$$

$$\{(5x + 8)(x + 1) \leq 2 \mid 5x + 8 > 0 \mid x + 1 > 0\}$$

$$1 = 6$$

Використали теорему про логарифм
добутку та логарифм частки

За теоремою про розв'язок
логарифмічних нерівностей виду
 $f(x) > g(x) \quad f(x) \geq g(x)$



$$\{5x^2 + 5x + 8x + 8 - 2 \leq 0 \quad 5x > -8 \quad x > -1\} \Rightarrow \{5x^2 + 13x + 6 \leq 0 \quad x > -\frac{8}{5} \quad x > -1\}$$

$$5x^2 + 13x + 6 \leq 0$$

$$f(x) = 5x^2 + 13x + 6$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

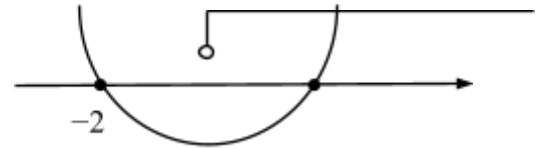
2. Нулі функції $f(x)$: $5x^2 + 13x + 6 = 0$

$$D = 169 - 120 = 49 = 7^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 7}{10} = [x_1 = -\frac{3}{5} \quad x_2 = -2]$$

Так як знак нерівності « $\leq$ », оберемо проміжок $[-\frac{3}{5}; -2]$

Відповідь: $(-\frac{8}{5}; -\frac{3}{5}]$



№7

Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2 \log_{\frac{1}{9}} x - 5x + 2 \geq 0$$

$$2t^2 - 5t + 2 \geq 0$$

Виконали заміну: $x = t$

$$2t^2 - 5t + 2 \geq 0$$

$$f(x) = 2t^2 - 5t + 2$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

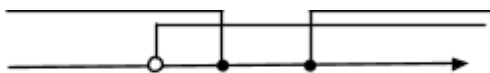
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = [t_1 = 2 \quad t_2 = \frac{1}{2}]$$

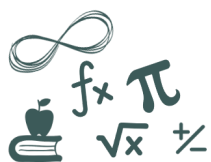
Так як знак нерівності « $\geq$ », оберемо проміжок $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$

Тобто $[t \geq 2 \quad t \leq \frac{1}{2}]$



$$[t \geq 2 \quad t \leq \frac{1}{2}] \Rightarrow [x \geq 2 \quad x \leq \frac{1}{2}] \Rightarrow \{[x \leq (\frac{1}{9})^2 \quad x \geq (\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}] \quad x > 0\} \Rightarrow \{[x \leq \frac{1}{81} \quad x \geq \frac{1}{3}] \quad x > 0\}$$





Відповідь: $(0; \frac{1}{81}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$

V. Підсумок уроку

- Які нерівності називають логарифмічними?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність? Наведіть приклад.
- Як розв'язати нерівність типу $f(x) > g(x)$, якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $f(x) > g(x)$, якщо $0 < a < 1$?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст.36-37) Виконати № 7.2 (1,4); 7.4 (1,4); 7.6 (6); 7.8 (1); 7.10 (1,2); 7.12 (1,3); 7.14 (4)	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §7 Виконати № 7.2 (1,2); 7.6 (1,2); 7.10 (1); 7.14 (1); 7.24; 7.28	Істер О.С.
Опрацювати §5 (п.5.2) Виконати № 5.2.1 (1,3); 5.2.3 (1,4); 5.2.5 (1,3);	Нелін Є.П.
Опрацювати §4 Виконати № 163 (а,в); №178 (а); 183 (а,г)	Бевз Г.П.