



TEKNIK PENGINTEGRALAN

INTEGRAL SUBSTITUSI

Luthfiyati Nurafifah, S.Pd., M.Si | Kalkulus Integral (Kalkulus II) | Januari 2025



UNIVERSITAS WIRALODRA
INDRAMAYU

UNIVERSITAS NAHDLATUL
WATHAN MATARAM



TEKNIK PENGINTEGRALAN: INTEGRAL SUBSTITUSI

Kompetensi Dasar:

1. Memahami prinsip Teknik pengintegralan dengan metode substitusi
2. Menganalisis permasalahan yang dapat menggunakan Teknik substitusi
3. Menyelesaikan permasalahan integral dengan menggunakan Teknik Substitusi

Indikator:

Setelah Pembelajaran diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami prinsip Teknik pengintegralan dengan metode substitusi
2. Menganalisis permasalahan yang dapat menggunakan Teknik substitusi
3. Menyelesaikan permasalahan integral dengan menggunakan Teknik Substitusi

A. TEKNIK SUBSTITUSI

Seiring dengan perkembangan bentuk fungsi, tidak semua bentuk fungsi dapat diintegrasikan langsung menggunakan aturan-aturan integral tak tentu ataupun integral tentu. Ada banyak bentuk fungsi yang harus menggunakan Teknik tertentu untuk dapat diperoleh hasil integralnya atau anti turunannya. Salah satu Teknik tersebut adalah Teknik substitusi. Prinsip Teknik substitusi adalah dengan menggantikan suatu bentuk aljabar dengan variable lain sehingga dapat diintegrasikan. Untuk dapat menggunakan Teknik ini, harus dipastikan bahwa dalam suatu fungsi yang akan diintegrasikan terdapat perkalian antara bentuk fungsi dan turunan fungsinya (terdapat perkalian antara $f(x)$ dan $f'(x)$). Sebelum membahas lebih lanjut, agar Teknik substitusi dapat dikerjakan dengan hasil yang benar, kita harus lebih hafal bentuk-bentuk hasil integral sebanyak mungkin. Beberapa daftar bentuk baku integral beserta hasilnya disajikan pada gambar 1.

Bentuk integral standar

Konstanta, pangkat	1. $\int k \, du = ku + C$	2. $\int u^r \, du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln u + C & r = -1 \end{cases}$
Ekspensial	3. $\int e^u \, du = e^u + C$	4. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$
Fungsi trigonometri	5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$	6. $\int \cos u \, du = \sin u + C$
	7. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$	8. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
	9. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$	10. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
	11. $\int \tan u \, du = -\ln \cos u + C$	12. $\int \cot u \, du = \ln \sin u + C$
	13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	14. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
Fungsi aljabar	15. $\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{ u }{a}\right) + C = \frac{1}{a} \cos^{-1}\left(\frac{a}{ u }\right) + C$	
Fungsi Hiperbolik	16. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$	17. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$

Gambar 1. Bentuk Baku Integral

Ada dua bagian yang akan dibahas untuk mendalami Teknik substitusi, pertama adalah Teknik substitusi untuk integral tak tentu, dan kedua adalah Teknik substitusi integral tentu.

B. ATURAN SUBSTITUSI UNTUK INTEGRAL TAK TENTU

TEOREMA A.

Misalkan g fungsi terdiferensiasikan dan misalkan bahwa F adalah anti-turunan f .

Maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Untuk memahami penggunaan teorema A, perhatikan contoh soal berikut:

1. Tentukan hasil dari $\int x\sqrt{x^2 + 9} dx$

Penyelesaian: perhatikan bahwa bentuk fungsi pada soal tidak dapat diintegrasikan secara langsung. Karena itu tidak bisa menggunakan aturan-aturan baku untuk integral tak tentu yang telah kita pelajari. Untuk itu kita akan menggunakan Teknik substitusi. Perhatikan bahwa dalam fungsi integran, terdapat perkalian antara fungsi polinomial derajat 2 yaitu $x^2 + 9$ dengan fungsi polinomial berderajat 1 yaitu x dimana polinomial berderajat 1 ini merupakan kelipatan dari turunan polinomial berderajat 2. Karena itu kita akan memisalkan fungsi polinomial berderajat 2 dengan suatu variabel lain yang berbeda dengan variabel pengintegralan.

Misalkan

$$u = x^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Leftrightarrow du = 2x dx$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Pemisalan awal dan bentuk terakhir akan kita substitusikan pada bentuk permasalahan awal.

$$\int x\sqrt{x^2 + 9} dx \Leftrightarrow \int x\sqrt{u} \frac{du}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \int \sqrt{u} \frac{du}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} \right) + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

Setelah memperoleh hasil integral dalam variabel u , kita akan substitusi

kembali pemisalan u di awal sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} (x^2 + 9)^{\frac{3}{2}} + C \text{ dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan}$$

Teknik substitusi

$$\int x \sqrt{x^2 + 9} dx = \frac{1}{3} (x^2 + 9)^{\frac{3}{2}} + C$$

2. Tentukan $\int \sin \sin 3x dx$

Misalkan

$$u = 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \dots$$

$$\Leftrightarrow du = \dots dx$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\dots}$$

Pemisalan awal dan bentuk terakhir akan kita substitusikan pada bentuk permasalahan awal.

$$\int \sin \sin 3x dx \Leftrightarrow \int \sin \sin u \cdot \frac{du}{\dots}$$

$$\Leftrightarrow \int \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\dots} \int \dots$$

$$\Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} + C$$

$$C$$

Setelah memperoleh hasil integral dalam variabel u , kita akan substitusi kembali pemisalan u di awal sehingga diperoleh
 $\Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} + C$ dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan Teknik substitusi

$$\int \sin \sin 3x \, dx = \underline{\hspace{2cm}} + C$$

3. Carilah $\int \frac{x}{(x^2)} dx$

$$u = \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \dots$$

$$\Leftrightarrow du = \dots dx$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\dots}$$

Pemisalan awal dan bentuk terakhir akan kita substitusikan pada bentuk permasalahan awal.

$$\int \frac{x}{(x^2)} dx \Leftrightarrow \dots$$

.....

Karena $\frac{1}{x} = x$ maka

.....

.....

.....

Setelah memperoleh hasil integral dalam variabel u , kita akan substitusi

kembali pemisalan u di awal sehingga diperoleh

$\Leftrightarrow$ _____ + C dengan demikian, diperoleh hasil pengintegralan dengan Teknik substitusi

$$\int \frac{x}{(x^2)} dx = \text{_____} + C$$

C. ATURAN SUBSTITUSI UNTUK INTEGRAL TAK TENTU

TEOREMA B

Misalkan g mempunyai turunan kontinu pada $[a,b]$, dan misalkan f kontinu pada daerah nilai g . Maka,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Dimana $u=g(x)$

Untuk memahami penggunaan teorema B, perhatikan contoh soal berikut:

1. Hitunglah $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} dx$

Misalkan

$$u = x^2 + 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow du = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)dx = \frac{1}{2} du,$$

dan perhatikan bahwa ketika $x=0$ maka $u=6$

dan ketika $x=1$ maka $u=9$.

Dengan demikian diperoleh $g(a)=6$ dan $g(b)=9$ sehingga penyelesaian persamaan menjadi:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} dx = \int_6^9 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_6^9 u^{-2} du \\
&= \frac{1}{2} \left(-u^{-1} \right)_6^9 \\
&= \left[-\frac{1}{2u} \right]_6^9 \\
&= -\frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

Jadi $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} dx = \frac{1}{36}$

2. Tentukan hasil dari $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Jadi, $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \dots$

3. Hitunglah $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^4 + 11} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Jadi, $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^4 + 11} dx = \dots$

D. Quiz

Kerjakan permasalahan berikut menggunakan Teknik substirusi dan upload jawaban pada LOM (SPADA Indonesia)

1. $\int x^2 (x^3 + 5)^9 dx = \dots$

2. $\int x^6 (7x^7 + \pi)^8 \sin \sin [(7x^7 + \pi)^9] dx = \dots$

3. $\int_1^3 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}} dx = \dots$

4. $\int_0^1 x \sin \sin \pi x^2 dx = \dots$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x \cos \cos 3x dx = \dots$