

Chapitre VIII : Intégration

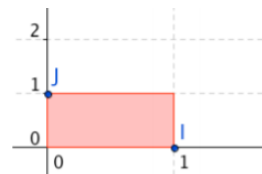
Objectifs :

- Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle [a ; b]
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle [a ; b]
- Calculer une aire sous une courbe ou entre deux courbes

I. Intégrale d'une fonction sur [a ; b]

Définition d'une unité d'aire

Dans un repère orthogonal (O, I, J), on appelle unité d'aire (u.a), l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].



Exemple : L'aire du rectangle vert vaut 8 u.a car cette aire est égale à 8 fois celle du rectangle rouge.

Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

On considère la fonction f **continue et positive sur** $[a ; b]$

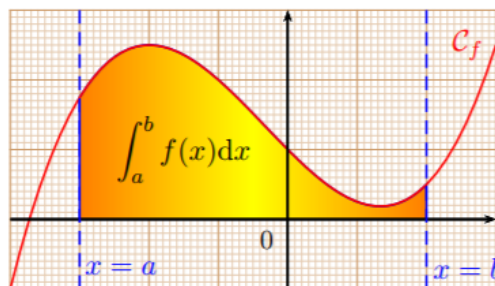
On appelle l'intégrale de a à b de la fonction f l'aire (en unités d'aires du repère) de la surface du plan délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Cette aire est notée : $Aire = \int_a^b f(x) dx$

Elle se lit : intégrale de a à b de f

- a et b sont appelés les bornes
- f est appelé l'intégrande

Les intégrales peuvent servir à calculer des aires de figures non usuelles



Remarque : La variable x peut être remplacée par toute autre variable, on dit que cette variable est "muette".

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

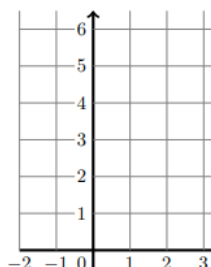
Remarque : Cette notation est due au mathématicien allemand **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégrale est égale à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.



Exemple :

a) Représentons la surface associée à $\int_{-1}^3 x + 3 dx$ dans le repère ci-contre

b) Calcul de $\int_{-1}^3 x + 3 dx = \dots\dots\dots$

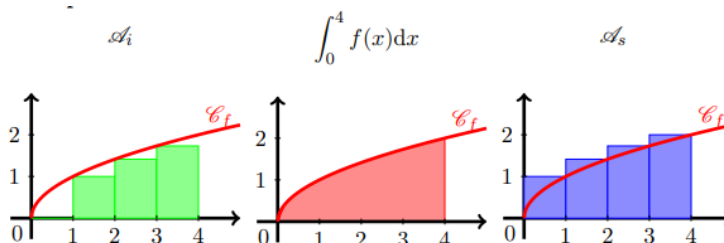


Approximation d'une intégrale : méthode des rectangles inférieurs et supérieurs

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
 On partage l'intervalle en n intervalles de même amplitude et on construit des rectangles inférieurs et supérieurs. Alors :

$$A_1 \leq \int_a^b f(x) dx \leq A_2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_2 = \int_a^b f(x) dx$$

Exemple : Pour $n = 4$



Théorème fondamental de l'analyse

Si f est une fonction continue et positive sur $[a ; b]$, la fonction F définie sur $[a ; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur $[a ; b]$ et a pour dérivée f . On a ainsi $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a ; b]$

Propriété : calcul d'une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

Si F est une primitive de la fonction f alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Remarque : Cette formule s'étend aux fonctions continues de signes quelconques sur un intervalle I avec a et b deux réels quelconques de I et on peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

Définition : Généralisation de la notion d'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ,
 F est une primitive de f , a et b sont deux réels quelconques de I .
 On appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$
 On note cette intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple :

- a) Calculer $\int_{-1}^3 x + 3 dx$
- b) Calculer $\int_1^2 x^2 dx$

II. Propriétés de l'intégrale

Propriétés algébriques

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. **Linéarité** : Pour tout réel k $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)+g(x)dx$,

3. **Relation de Chasles** : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Exemple : $\int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \dots\dots\dots$

Démonstration : $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$

Remarque : $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x)dx$

III. Valeur moyenne

Valeur moyenne

Pour toute fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ le réel m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Remarque : cette égalité s'écrit aussi $m(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

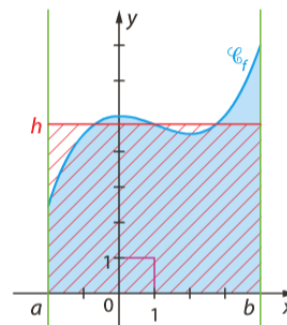
Interprétation graphique :

Dans le cas où f est positive sur $[a ; b]$

L'intégrale est égale à l'aire du domaine situé entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Comme $m(b-a)$ vaut cette aire, c'est l'aire d'un rectangle de longueur $(b-a)$ et de hauteur m .

Ainsi m est la hauteur du rectangle de longueur $(b-a)$ et ayant la même aire que le domaine sous la courbe.



Exemple en physique : la vitesse moyenne d'un mobile lors d'un mouvement uniformément accéléré entre les instants t_1 et t_2 est égale à la valeur moyenne de sa vitesse :

$$v_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Exemple : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.

IV. Calcul d'aires

Fonction positive

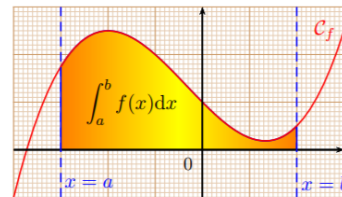
Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Soit f une fonction f **continue et positive** sur $[a; b]$

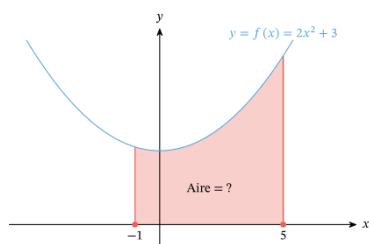
L'aire du domaine D défini comme l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

- $a \leq x \leq b$
- $0 \leq y \leq f(x)$

est : $\text{Aire}(D) = \int_a^b f(x) dx$



Exemple : Calcul de l'aire sous la courbe



Fonction négative

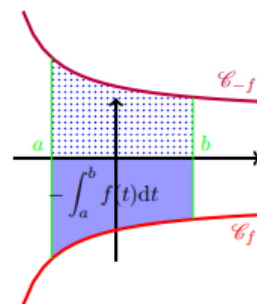
Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Soit f une fonction f **continue et négative** sur $[a; b]$

L'aire du domaine D défini comme l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

- $a \leq x \leq b$
- $f(x) \leq y \leq 0$

est : $\text{aire}(D) = - \int_a^b f(x) dx$



Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x$

Calculer l'aire du domaine coloré.



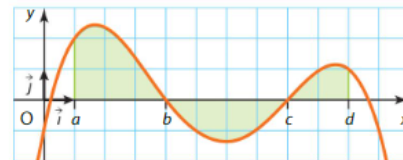
Fonction de signe non constant

Soit f une fonction f **continue sur** $[a ; d]$

On découpe l'intervalle $[a ; d]$ en une succession d'intervalles sur lesquels la fonction a un signe constant.

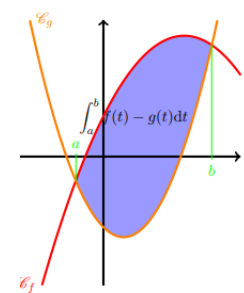
Sur chaque intervalle, on procède comme dans les deux cas précédents.

L'aire totale est la somme des aires de chaque domaine.



$$\text{Aire}(D) = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

Aire entre deux courbes



Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Soient f et g deux fonctions **continues sur** $[a ; b]$ **telles que** $f(x) \geq g(x)$

L'aire de la partie délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\text{Aire}(D) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Exemple : Les fonctions f et g sont définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

Calculer l'aire du domaine colorié en vert

