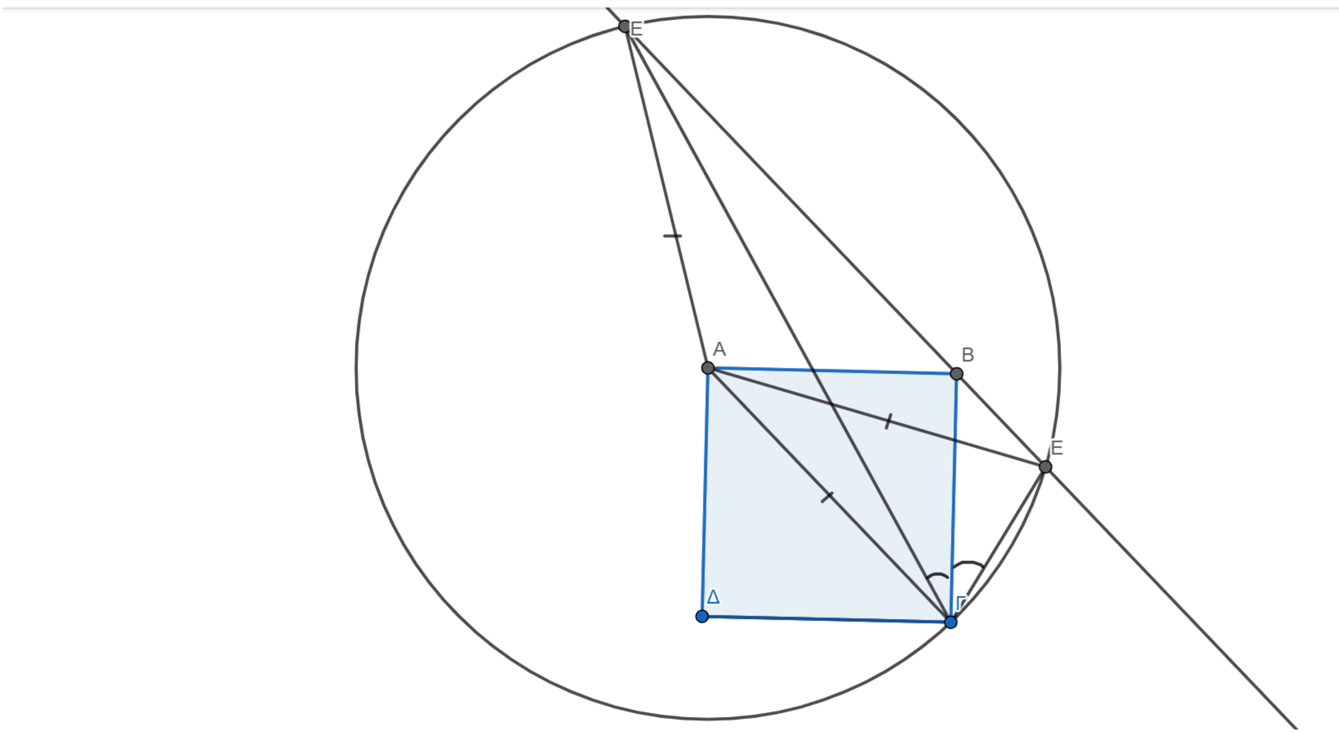
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Το πρόβλημα έχει ως εξής :

Έστω ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο Β και είναι παράλληλη στην ΑΓ . Αν Ε σημείο της (ε) , ώστε να ισχύει ΑΕ=ΑΓ να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{\Gamma}E$, με Κλασσική Ευκλείδεια Γεωμετρία .

Σύμφωνα με την εκφώνηση , το σχήμα πρέπει να είναι έτσι :



Για συντομία θα συμβολίζουμε :

ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΑΔ=α

$B\hat{\Gamma}E$=ω

$\Gamma\hat{A}E$=φ

$B\hat{A}E$=θ

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ με $\hat{\Delta}=90^o$:
$A\Gamma^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$, άρα $A\Gamma=\alpha\sqrt{2}$

Άρα , $A\Gamma=B\Delta=AE=\alpha\sqrt{2}$ (1.1)

Οπότε , αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου ισχύει :

ΑΟ=ΟΓ=ΒΟ=ΟΔ=$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (1.2)

Το σημείο τομής της ΑΕ με τη ΒΓ θα ονομάζεται Ζ .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΓΩΝΙΑΣ $A\hat{E}B$

Παρατηρούμε ότι , για ένα μόνο σημείο της ευθείας (ε) ισχύει $A\hat{E}B=90^o$.

Έστω ότι $A\hat{E}B=90^o$

Η ΑΕ και η ΒΟ είναι αποστάσεις των ΑΓ και (ε) , άρα ΑΕ=ΒΟ .

Όμως , ΒΟ=$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

Άρα , ΑΕ=$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ άτοπο

Το συμπέρασμα αυτό είναι άτοπο , διότι ΑΕ= $\alpha\sqrt{2}$.

Άρα , $A\hat{E}B\neq 90^o$

Αφού , $A\hat{E}B\neq 90^o$ υπάρχουν δύο σημεία της ευθείας (ε) , για τα οποία ισχύει ΑΕ=ΑΓ .

Επίσης , το πάνω Ε του σχήματος θα αναφέρεται ως Ε' , για να ξεχωρίζει από το κάτω .

Επιπλέον , θα συμβολίζεται :

$B\hat{\Gamma}E'=\omega'$

$\Gamma\hat{A}E'=\varphi'$

$B\hat{A}E'=\theta'$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ (ΑΓ=ΑΕ από υπόθεση) έχουμε :

$2\cdot(45^o+\omega)+\varphi=180^o$ από την οποία προκύπτει ότι $2\omega+\varphi=90^o$ (1.3)

Η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}B$:

$\Gamma\hat{A}B=\Delta\hat{A}B/2$ και αφού $\Delta\hat{A}B=90^o$, $\Gamma\hat{A}B=45^o$

Όμως , $Γ\hat{Α}Β=φ+θ$, άρα $φ+θ=45^o$ (1.4)

Επιπλέον , ισχύει ότι :

$φ'-θ'=90^o$ (1.5) και

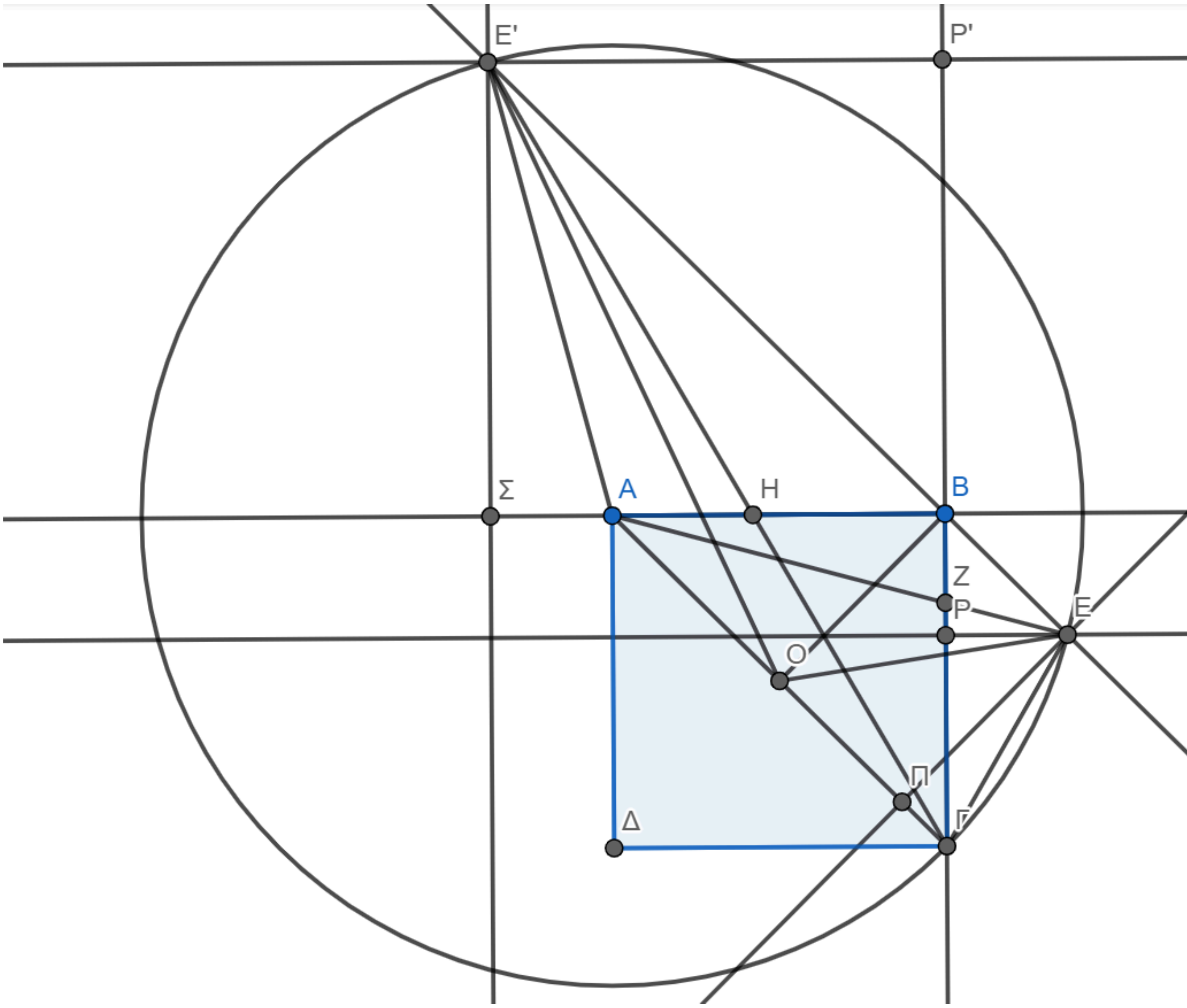
στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ' (ΑΓ=ΑΕ') έχουμε :

$φ'+Α\hat{Ε}'Γ+Α\hat{Γ}Ε'=180^o$, δηλαδή $φ'+2Α\hat{Γ}Ε'=180^o$

Όμως , $Α\hat{Γ}Ε'=45^o-ω'$

Άρα , θα έχουμε $φ'-2ω'=90^o$ (1.6)

Παρατηρούμε ότι , από τις (1.3) και (1.4) δημιουργείται ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους . Παρόμοια και με τις (1.5) και (1.6) . Για να λυθούν τα συστήματα πρέπει να βρεθεί μία ακόμα εξίσωση για το καθένα με τους αγνώστους , που να είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις άλλες δύο . Αν λυθεί το σύστημα , προφανώς θα λυθεί και το πρόβλημα , αφού θα βρεθεί η γωνία ω και ω', που είναι η ζητούμενες . Με μια πρώτη ματιά , προσπαθώντας να βρούμε κάποια άλλη εξίσωση καταλήγουμε συνεχώς σε γραμμικά εξαρτώμενες των δύο άλλων .



ΓΩΝΙΑ ω

Καταρχάς , ας προσπαθήσουμε να βρούμε τη γωνία ω :

Θα κάνουμε διερεύνηση για τη γωνία ω :

Έστω ω=0 , τότε θα ίσχυε ΑΕ=α , άρα είναι άτοπο .

Έστω $ω=45^o$, τότε από (1.3) έχουμε $2\cdot 45^o+φ=90^o$, δηλαδή $φ=0^o$, που είναι άτοπο .

Έστω $ω>45^o$, τότε $2ω>90^o$, αφού $2ω=90^o-φ$ θα έχουμε $90^o-φ>90^o$.

Δηλαδή , θα πρέπει να ισχύει $φ<0^o$, που είναι άτοπο .

Άρα , για τη γωνία ω έχουμε $0^o<ω<45^o$ (1.7).

Εφόσον , ισχύει $0^o<ω<45^o$ και $ω+\widehat{ΒΕΓ}+45^o=180^o$, δηλαδή $\widehat{ΒΕΓ}=135^o-ω$ έχουμε $90^o<\widehat{ΒΕΓ}<135^o$.

Επίσης , από την (1.7) προκύπτει $0^o<90^o-2ω<90^o$ και από την (1.3) έχουμε $0^o<φ<90^o$ (1.8) . Άρα , η φ είναι οξεία .

Η απόσταση της ΑΓ από την (ε) είναι $d=OB=\frac{α\sqrt{2}}{2}$ από (1.2)

Η προβολή της ΑΕ στην ΑΓ θα είναι από Π.Θ. $ΑΠ^2 = ΑΕ^2 - d^2$

και αν αντικαταστήσουμε το d και τη (1.1) θα έχουμε $ΑΠ = \frac{α\sqrt{6}}{2}$

Δηλαδή , το $ΓΠ=ΑΓ-ΑΠ=\frac{α\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2}$

Άρα , $(ΑΓΕ) = (ΑΕΠ) + (ΓΕΠ) = \frac{1}{2}\frac{α\sqrt{2}}{2}\frac{α\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\frac{α\sqrt{2}}{2}\frac{α\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2} = \frac{α^2}{2}$

Από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε :

$(ΑΓΕ)=\sqrt{τ(τ - α)(τ - β)(τ - γ)}$

$\frac{α^2}{2} = \sqrt{\frac{2ΑΕ+ΓΕ}{2}\left(\frac{2ΑΕ+ΓΕ}{2} - ΑΕ\right)^2\left(\frac{2ΑΕ+ΓΕ}{2} - ΓΕ\right)}$ από (1.9)

αντικαθιστώντας τη (1.1) έχουμε $\frac{α^2}{2} = \sqrt{\left(α\sqrt{2} + \frac{ΓΕ}{2}\right)\left(\frac{ΓΕ}{2}\right)^2\left(α\sqrt{2} - \frac{ΓΕ}{2}\right)}$

Δηλαδή , $ΓΕ^2\left(2α^2 - \frac{ΓΕ^2}{4}\right) = α^4$

Άρα , καταλήγουμε στην εξίσωση $ΓΕ^4 - 8α^2ΓΕ^2 + 4α^4 = 0$

Θέτω $ω=ΓΕ^2$ (Μ)

Οπότε , $ω^2 - 8α^2ω + 4α^4 = 0$

Λύνοντας ως προς ω βρίσκουμε $ω = 4α^2 \pm 2\sqrt{3}α^2$

Από (Μ) έχουμε $ΓΕ = α\sqrt{2(2\pm\sqrt{3})}$

Έστω $ΓΕ = α\sqrt{2(2 + \sqrt{3})}$

Τότε $ΓΕ^2 = 2α^2(2 + \sqrt{3})$

$ΑΓ^2 + ΑΕ^2 = (α\sqrt{2})^2 + (α\sqrt{2})^2 = 4α^2$

$2\alpha^2(2+\sqrt{3}) > 4\alpha^2 \Leftrightarrow 2(2+\sqrt{3}) > 4 \Leftrightarrow 2+\sqrt{3} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} > 0$ που ισχύει

Άρα , $ΓΕ^2 > ΑΓ^2 + ΑΕ^2$

Οπότε , $\varphi > 90^o$ που είναι άτοπο .

Άρα , δεν ισχύει $ΓΕ = \alpha\sqrt{2(2+\sqrt{3})}$.

Έστω $ΓΕ = \alpha\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε ότι τηρείται η (1.8) .

Άρα , $ΓΕ = \alpha\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$ (1.9) .

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΟ είναι

$$(ΑΕΟ) = \frac{1}{2}ΕΠ\,ΑΟ = \frac{1}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2}{4}$$

Από τον τύπο του Ήρωνα :

(ΑΕΟ)=$\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

$$\frac{\alpha^2}{4} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+\alpha\sqrt{2}+ΟΕ}{2}\left(\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+\alpha\sqrt{2}+ΟΕ}{2}-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+\alpha\sqrt{2}+ΟΕ}{2}-\alpha\sqrt{2}\right)\left(\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+\alpha\sqrt{2}+ΟΕ}{2}-ΟΕ\right)}$$

Από όπου προκύπτει :

$$4ΟΕ^4 - 20\alpha^2ΟΕ^2 + 13\alpha^4 = 0$$

Θέτω γ=$ΟΕ^2$ (Ν)

$$4\gamma^2 - 20\alpha^2\gamma + 13\alpha^4 = 0$$

Λύνοντας ως προς γ βρίσκουμε $\gamma = \alpha^2\left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{3}\right)$

Από (Ν) έχουμε ΟΕ=$\alpha\sqrt{\frac{5}{2} \pm \sqrt{3}}$

Έστω ΟΕ=$\alpha\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}$

Τότε $ΟΕ^2 = \alpha^2\left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right)$

$AE^2 + AO^2 = \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}\alpha^2$

$\alpha^2\left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) > \frac{5}{2}\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} + \sqrt{3} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3} > 0$ που ισχύει

Άρα , $OE^2 > AE^2 + AO^2$

Οπότε , φ>90° που είναι άτοπο

Άρα , δεν ισχύει ΟΕ=$\alpha\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}$.

Έστω ΟΕ=$\alpha\sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{3}}$

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε ότι τηρείται η (1.8) .

Άρα , ΟΕ=$\alpha\sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{3}}$ (1.10) .

Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΟ :

$OE^2 = BE^2 + BO^2 \Leftrightarrow BE = \sqrt{OE^2 - BO^2}$

Αντικαθιστώντας την (1.2) και (1.10) έχουμε $BE = \alpha\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Από το Ε φέρνουμε κάθετη ΕΡ στη ΒΓ .

Στο τρίγωνο ΒΕΡ ισχύει $B\hat{P}E$=90° και $E\hat{B}P$=45° , άρα $B\hat{E}P$=45° .

Άρα , το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΒΡ=ΕΡ .

Εφαρμόζοντας Π.Θ. στο τρίγωνο ΒΕΡ βρίσκουμε ότι $EP^2 = \frac{BE^2}{2}$, δηλαδή

ότι $EP = \alpha\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

$EP = \alpha\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow EP = \frac{\alpha\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}{2} \Leftrightarrow EP = \frac{\Gamma E}{2}$ από (1.9)

Άρα , $EP = \frac{\Gamma E}{2}$ (1.11) .

Δηλαδή , στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΡ η ΕΡ ισούται με το μισό της υποτείνουσας . Άρα , η γωνία ω που βρίσκεται απέναντι από την ΕΡ πρέπει να είναι $ω=30^o$.

Άρα , $ω=30^o$.

ΓΩΝΙΑ ω'

Τώρα πρέπει να βρούμε την ω' :

Θα κάνουμε διερεύνηση για τη γωνία ω' :

Έστω ω'=0 , τότε ΑΕ'=α , που είναι άτοπο .

Έστω $ω'=45^o$, τότε από (1.6) $φ'=180^o$, που είναι άτοπο , αφού δε σχηματίζεται τρίγωνο .

Έστω $ω'>45^o$, τότε προκύπτει ότι $2ω'+90^o>180^o$, δηλαδή από (1.6) $φ'>180^o$, που είναι άτοπο .

Άρα , πρέπει $0<ω'<45^o$ (1.12) .

Επίσης , από την (1.6) και (1.12) προκύπτει ότι $90^o<φ'<180^o$. Άρα , η φ' είναι αμβλεία .

Για τη ΓΕ' ισχύει $ΓΕ' = α\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$ (1.13) , δηλαδή ισούται με τον τύπο που απορρίψαμε για τη ΓΕ . Αυτό συμβαίνει , διότι το εμβαδόν είναι το ίδιο , αφού έχουν την ίδια βάση ΑΓ και το ίδιο ύψος , επειδή ΑΓ//(ε) , και αφού οι γνωστές πλευρές έχουν ίσα μήκη , διότι ΑΓ κοινή και ΑΕ'=ΑΕ=ΑΓ . Εδώ δεχόμαστε αυτό τον τύπο και όχι αυτό με το πλην , αφού θέλουμε η γωνία να είναι αμβλεία .

Παρόμοια , για την ΟΕ' θα ισχύει $ΟΕ'=α\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{3}}$ (1.14) .

Εφαρμόζοντας Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕ'Ο βρίσκουμε ότι

$ΒΕ' = \sqrt{ΟΕ'^2 - ΒΟ^2}$ και αντικαθιστώντας με (1.2) και (1.14) βρίσκουμε ότι $ΒΕ' = α\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Φέρνουμε από το Ε' την Ε'Σ κάθετη στην ΑΒ .

Στο τρίγωνο ΒΕ'Σ ισχύει $B\hat{\Sigma}E'=90^o$ και $E'\hat{B}\Sigma=45^o$, δηλαδή $B\hat{E'}\Sigma=45^o$.

Άρα , το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΒΣ=Ε'Σ .

Εφαρμόζοντας Π.Θ. στο τρίγωνο ΒΕ'Σ βρίσκουμε ότι $E'\Sigma^2 = \frac{BE'^2}{2}$, δηλαδή ότι $B\Sigma = E'\Sigma = \frac{\alpha\sqrt{2(2+\sqrt{3})}}{2}$.

Από το Ε' φέρνουμε παράλληλη στην ΑΒ . Προεκτείνουμε τη ΒΓ , ώστε να τέμνει την ευθεία αυτή στο σημείο Ρ' . Αφού ΒΡ'//Ε'Σ και Ε'Ρ'//ΒΣ , το τετράπλευρο Ε'Ρ'ΒΣ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $B\hat{\Sigma}E'=90^o$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .

Όμως , Ε'Σ=ΒΣ

Άρα , είναι και ρόμβος .

Άρα , το Ε'Ρ'ΒΣ είναι τετράγωνο .

Έχουμε $E'P'=\frac{\alpha\sqrt{2(2+\sqrt{3})}}{2} \Leftrightarrow E'P' = \frac{\Gamma E'}{2}$ από (1.13)

Δηλαδή , στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕ'Ρ' η Ε'Ρ' ισούται με το μισό της υποτείνουσας . Άρα , η γωνία ω' που βρίσκεται απέναντι από την Ε'Ρ' πρέπει να είναι $\omega'=30^o$.

Άρα , $\omega'=30^o$.

Τέλος , παρατηρούμε ότι ισχύει $\omega'=\omega=30^o$.

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ