

ВИДЫ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a \neq 0, & x = \frac{b}{a} \\ a = 0, & b \neq 0 \quad 0x = b \\ a = 0, & b = 0 \quad 0x = 0 \quad x \in R \end{cases}$$

1) Линейное $ax = b$

нет решений

2) Квадратное $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Если $c = 0 \quad ax^2 + bx = 0 \quad x(ax + b) = 0 \quad x = 0$ или $x = -b/a$

Если $b = 0 \quad ax^2 + c = 0 \quad x^2 = -c/a$

Если $b \neq 0 \quad c \neq 0$, то $D = b^2 - 4ac$, если $D < 0 \quad \emptyset$, если $D = 0 \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad x = -\frac{b}{2a}$

Если $D > 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ или теорема Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

3) $(x-a)(x-b)(x-c) \dots = 0$, $x = a \cup x = b \cup x = c$

4) Дробно-рациональное а) $\frac{x}{x-a} = \frac{k}{x-b} \quad x \neq a \quad x \neq b \quad x(x-b) = k(x-a)$ пропорция

б) $\frac{n}{x-a} + \frac{m}{x-b} = 0 \quad x \neq a \quad x \neq b \quad \frac{n(x-b) + m(x-a)}{(x-a)(x-b)} = 0 \Rightarrow n(x-b) + m(x-a) = 0$ - к общему знаменателю

5) Группировка $ax^3 + bx^2 + nax + nb = 0 \quad (ax^3 + nax) + (bx^2 + nb) = 0 \quad ax(x^2 + n) + b(x^2 + n) = 0$
 $(x^2 + n)(ax + b) = 0 \quad x^2 + n = 0 \cup ax + b = 0$

6) Высшей степени $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + c = 0$ целые корни среди делителей числа c
 Один корень – подбором $x = p$ Схема Горнера:

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x^0
	1	a	b	...	c
p	1	$p \cdot 1 + a$	$p(p \cdot 1 + a) + b$	...	0
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	...	остаток

7) Симметрические (возвратные) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ делим на x^2

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

замена

$$x + \frac{1}{x} = t \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

8) Введение новой переменной (замена) $\left(\begin{matrix} ax^2 + bx + c \\ t \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} ax^2 + bx + d \\ t \end{matrix} \right) = m$

9) $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + mx + c) = dx^2$ делим на x^2

$$\left(\begin{matrix} ax + b + \frac{c}{t+b} \\ t+b \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} ax + m + \frac{c}{t+m} \\ t+m \end{matrix} \right) = d$$

10) С модулем а) $|x+k|=a \begin{cases} a < 0 & \emptyset \\ a \geq 0 & \begin{cases} x+k=a \\ x+k=-a \end{cases} \end{cases}$

б) $|x+a|=|x+b| \Rightarrow (x+a)^2 = (x+b)^2$

в) $|x-a|+|x-b|=c$ нули подмодульных выражений а и b

11) Иррациональные а) $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
 $f(x) = g^2(x)$

б) $\sqrt[n]{x-a} + \sqrt[k]{x+b} = c$ замена $\begin{cases} \sqrt[n]{x-a} = y \\ \sqrt[k]{x+b} = z \end{cases}$ переход к системе
 $\begin{cases} y^n - z^k = -a - b \\ y + z = c \end{cases}$

12) Показательные а) $a^x = a^b \Rightarrow x = b$ б) $a^x = c \Rightarrow x = \log_a c$

в) однородные $a^{2x} + a^x b^x + b^{2x} = 0 \quad / : b^{2x}$

г) $a^x = b^x \quad / : b^x$

д) приводимые к квадратным $a^{2x} + a^x + b = 0 \quad a^x = t$

е) с иррациональным основанием $(\sqrt{a-b})^x + (\sqrt{a+b})^x = c$, если
 $\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a+b} = 1, \quad (\sqrt{a-b})^x = t, \quad (\sqrt{a+b})^x = \frac{1}{t}$

13) Степенно-показательные $x^{x+a} = x^b \Rightarrow 1$ сл – показательное $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x+a=b$
 2 сл – степенное, проверяем
 $x=1, x=0, x=-1$

14) Логарифмические а) $\log_a x = \log_a b \Rightarrow x = b$, ОДЗ: $x > 0, a > 0, a \neq 1$

б) $\log_a x = c \Rightarrow x = a^c$

в) $x^{\log_a x} = b$ логарифмирование по основанию а

15) Тригонометрические а) $\sin x = a, |a| \leq 1, x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, \quad \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

б) $\cos x = a, |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n$

$$в) \quad \operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, \quad \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$г) \text{ однородные 1-ой степени} \quad a \sin x + b \cos x = 0 \quad / : \cos x$$

$$д) \text{ однородные 2-ой степени} \quad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad / : \cos^2 x$$

$$е) \text{ неоднородные 1-ой степени} \quad a \sin x + b \cos x = c \quad / : \sqrt{a^2 + b^2} \text{ - вспомогательный угол}$$

$$\text{или, если } a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ универсальная подстановка } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = u, \text{ тогда}$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$ж) \text{ неоднородные 2-ой степени} \quad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d, \quad /$$

$$d \cdot 1, \quad 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$з) \text{ понижение степени} \quad \sin^2 ax + \cos^2 bx = c, \quad \sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2}, \quad \cos^2 bx = \frac{1 + \cos 2bx}{2}$$

$$и) \quad a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c \quad \text{замена} \quad \sin x + \cos x = t \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$к) \quad \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots = c \quad / \cdot 2 \sin \frac{x}{2}$$

$$л) \text{ метод оценки} \quad \sin ax = x^2 + bx + c \Rightarrow -1 \leq \sin ax \leq 1, \quad x^2 + bx + c \geq y_b$$