В И Д Ы У Р А В Н Е Н И Й

1) Линейное ax = в
$$\begin{cases} a \neq 0, \quad x = \dfrac{b}{a} \\ a = 0, \quad b \neq 0 \quad 0x = b \\ a = 0, \quad b = 0 \quad 0x = 0 \quad x \in R \end{cases}$$
нет решений

2) Квадратное $ax^2 + вx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Если $c = 0$ $ax^2 + вx = 0$ $x(ax + в) = 0$ $x = 0$ или $x = -в/a$

Если $в = 0$ $ax^2 + c = 0$ $x^2 = -c/a$

Если $в \neq 0$ $c \neq 0$, то $D = b^2 - 4ac$, если $D < 0$ $\varnothing$, если $D = 0$ $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ $x = -\dfrac{b}{2a}$

Если $D > 0$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ или теорема Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

3) $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = 0,$ $x = a \cup x = b \cup \quad x = c$

4) Дробно-рациональное а) $\dfrac{x}{x-a} = \dfrac{k}{x-b}$ $x \neq a$ $x \neq b$ $x(x-b) = k(x-a)$ пропорция

б) $\dfrac{n}{x-a} + \dfrac{m}{x-b} = 0$ $x \neq a$ $x \neq b$ $\dfrac{n(x-b) + m(x-a)}{(x-a)(x-b)} = 0 \Rightarrow n(x-b) + m(x-a) = 0$ - к общему знаменателю

5) Группировка $ax^3 + bx^2 + nax + nb = 0$ $(ax^3 + nax) + (bx^2 + nb) = 0$ $ax(x^2 + n) + b(x^2 + n) = 0$

$(x^2 + n)(ax + b) = 0$ $x^2 + n = 0 \cup ax + b = 0$

6) Высшей степени $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + c = 0$ целые корни среди делителей числа c

Один корень – подбором x = p Схема Горнера:

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	…	x^0
	1	a	b	…	c
p	1	$p \cdot 1 + a$	$p(p \cdot 1 + a) + b$	…	0
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	...	остаток

7) Симметрические (возвратные) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ делим на x^2

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

замена

$x + \dfrac{1}{x} = t$ $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$

8) Введение новой переменной (замена) $\left(\underbrace{ax^2+bx+c}_{t}\right)\left(\underbrace{ax^2+bx+d}_{t}\right)=m$

9) $\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+mx+c\right)=dx^2$ делим на x^2

$$\left(\underbrace{ax+b+\frac{c}{x}}_{t+b}\right)\left(\underbrace{ax+m+\frac{c}{x}}_{t+m}\right)=d$$

10) С модулем а) $|x+k|=a$ $\begin{cases} a<0 & \varnothing \\ a\ge 0 & \left[\begin{array}{l} x+k=a \\ x+k=-a \end{array}\right. \end{cases}$

б) $|x+a|=|x+b| \quad\Rightarrow\quad (x+a)^2=(x+b)^2$

с) $|x-a|+|x-b|=c$ нули подмодульных выражений a и b

11) Иррациональные а) $\sqrt{f(x)}=g(x)$ ОДЗ : $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

$f(x)=g^2(x)$

б) $\sqrt[n]{x-a}+\sqrt[k]{x+b}=c$ замена $\begin{cases} \sqrt[n]{x-a}=y \\ \sqrt[k]{x+b}=z \end{cases}$ переход к системе

$\begin{cases} y^n-z^k=-a-b \\ y+z=c \end{cases}$

12) Показательные а) $a^x=a^b \quad\Rightarrow x=b$ б) $a^x=c \quad\Rightarrow x=\log_a c$

в) однородные $a^{2x}+a^xb^x+b^{2x}=0 \quad /:b^{2x}$

г) $a^x=b^x \quad /:b^x$

д) приводимые к квадратным $a^{2x}+a^x+b=0 \quad a^x=t$

е) с иррациональным основанием $\left(\sqrt{a-b}\right)^x+\left(\sqrt{a+b}\right)^x=c$, если

$\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{a+b}=1, \quad \left(\sqrt{a-b}\right)^x=t, \quad \left(\sqrt{a+b}\right)^x=\frac{1}{t}$

13) Степенно-показательные $x^{x+a}=x^b \quad\Rightarrow$ 1 сл – показательное $x>0,\ x\ne 1 \quad\Rightarrow x+a=b$

2 сл – степенное , проверяем

$x=1,\ x=0,\ x=-1$

14) Логарифмические а) $\log_a x=\log_a b \quad\Rightarrow x=b$, ОДЗ: $x>0,\ a>0,\ a\ne 1$

б) $\log_a x=c \quad\Rightarrow x=a^c$

в) $x^{\log_a x}=b$ логарифмирование по основанию a

15) Тригонометрические а) $\sin x=a, \quad |a|\le 1, \qquad x=(-1)^n\cdot\arcsin a+\pi n, \quad n\in Z$

$\sin x=0\Rightarrow x=\pi n, \qquad \sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \qquad \sin x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$

б) $\cos x=a, \quad |a|\le 1, \qquad x=\pm\arccos a+2\pi n, \quad n\in Z$

$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \qquad \cos x=1\Rightarrow x=2\pi n, \qquad \cos x=-1\Rightarrow x=\pi+2\pi n$

в) $tgx = a, \qquad x = arctga + \pi n, \quad n \in Z$

$tgx = 0 \Rightarrow x = \pi n, \qquad tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$

г) однородные 1-ой степени $a \sin x + b \cos x = 0 \quad / : \cos x$

д) однородные 2-ой степени $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad / : \cos^2 x$

е) неоднородные 1-ой степени $a \sin x + b \cos x = c \quad / : \sqrt{a^2 + b^2}$ - вспомогательный угол

или, если $a, b, c \in Z$, универсальная подстановка $tg\frac{x}{2} = u$, тогда

$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

ж) неоднородные 2-ой степени $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$, /

$d \cdot 1, \quad 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

з) понижение степени $\sin^2 ax + \cos^2 bx = c, \quad \sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2}, \quad \cos^2 bx = \frac{1 + \cos 2bx}{2}$

и) $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c$ замена $\sin x + \cos x = t \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

к) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... = c \quad / \cdot 2 \sin \frac{x}{2}$

л) метод оценки $\sin ax = x^2 + bx + c \quad \Rightarrow -1 \le \sin ax \le 1, \quad x^2 + bx + c \ge y_b$