

Đề thi:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
THANH HOÁ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT  
NĂM HỌC 2021 - 2022

Môn thi: Toán

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 04/06/2021

Đề thi có: 01 trang gồm 05 câu.

**Câu I** (2,0 điểm).

Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{3x+25}{x-25}$ , với  $x \geq 0, x \neq 25$ .

1. Rút gọn biểu thức  $P$ .
2. Tìm các giá trị của  $x$  để  $P = \frac{5}{7}$ .

**Câu II** (2,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = (2m+1)x + m$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(1;5)$ .
2. Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ .

**Câu III** (2,0 điểm).

1. Giải phương trình  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .
2. Cho phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3$ .

**Câu IV** (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  ( $D$  thuộc  $BC, E$  thuộc  $AC, F$  thuộc  $AB$ ) của tam giác cắt nhau tại  $H, M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .

1. Chứng minh  $AEHF$  là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh các đường thẳng  $ME$  và  $MF$  là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEHF$ .
3. Chứng minh  $DE + DF \leq BC$ .

**Câu V** (1,0 điểm).

Cho ba số thực  $x, y, z$  thay đổi thỏa mãn các điều kiện  $x > \frac{1}{4}, y > \frac{1}{3}, z > \frac{1}{2}$  và

$\frac{4}{4x+3} + \frac{3}{3y+2} + \frac{2}{2z+1} \geq 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q = (4x-1)(3y-1)(2z-1)$ .

Hết

Gợi ý đáp án:

**Câu I (2,0 điểm):**

**Cách giải:**

Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{3x+25}{x-25}$  với  $x \geq 0, x \neq 25$ .

1) Rút gọn biểu thức  $P$

Với  $x \geq 0, x \neq 25$  ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{3x+25}{x-25} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-5) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 3x-25}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \\ &= \frac{x-5\sqrt{x}+2x+10\sqrt{x}-3x-25}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \\ &= \frac{5\sqrt{x}-25}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{5}{\sqrt{x}+5} \end{aligned}$$

Vậy  $P = \frac{5}{\sqrt{x}+5}$  với  $x \geq 0, x \neq 25$ .

2) Tìm các giá trị của  $x$  để  $P = \frac{5}{7}$

Ta có:  $P = \frac{5}{\sqrt{x}+5}$  với  $x \geq 0, x \neq 25$

$$\begin{aligned} P = \frac{5}{7} &\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{5}{7} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}+5 = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (tm)} \end{aligned}$$

Vậy  $x = 4$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu II (2,0 điểm)**

**Cách giải:**

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = (2m+1)x + m$  ( $m$  là tham số).

Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(1;5)$ .

Vì  $A(1;5) \in d$  nên thay tọa độ điểm  $A$  vào phương trình đường thẳng  $(d)$  ta có:

$$5 = (2m+1).1 + m \Leftrightarrow 3m+1=5 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{4}{3}.$$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 4x+3y=11 \\ 4x-y=7 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 4x+3y=11 \\ 4x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=4 \\ 4x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 4x-1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (2; 1)$ .

### Câu III (2,0 điểm):

Cách giải:

$$1. \text{ Giải phương trình } x^2 - 6x + 5 = 0.$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (-6)^2 - 4.1.5 = 16 > 0 \text{ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt: } \begin{cases} x_1 = \frac{6+\sqrt{16}}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{6-\sqrt{16}}{2} = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1; 5\}$ .

2. Cho phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3$ .

Phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  có  $\Delta' = 1 - m + 1 = 2 - m$ .

Phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ .

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases} \quad (1)$

Do  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  nên ta có:  $\begin{cases} x_1^2 = 2x_1 - m + 1 \\ x_2^2 = 2x_2 - m + 1 \end{cases}$

Theo bài ra ta có:



$$\begin{aligned}
& x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3 \\
& \Leftrightarrow x_1^4 - x_2^4 - (x_1^3 - x_2^3) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \\
& \Rightarrow (2(x_1 + x_2) - 2m + 2)(2x_1 - m + 1 - 2x_2 + m - 1) - (x_1 - x_2)[2(x_1 + x_2) - 2m + 2 + m - 1] \\
& \Leftrightarrow [2.2 - 2m + 2].2(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)[2.2 - m + 1] \\
& \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[2(6 - 2m) - 5 + m] = 0 \\
& \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(3m + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ m = \frac{7}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}
\end{aligned}$$

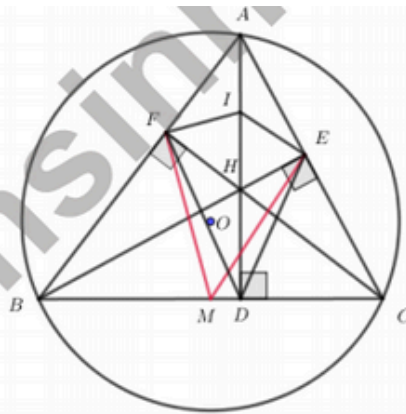
Thay  $x_1 = x_2$  vào (1) ta được:  $\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ x_1^2 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ m = 2 \text{ (tm)} \end{cases}$

Vậy  $m = 2$ .

**Câu IV (3,0 điểm):**

**Cách giải:**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  ( $D$  thuộc  $BC, E$  thuộc  $AC, F$  thuộc  $AB$ ) của tam giác cắt nhau tại  $H$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .



**1. Chứng minh  $AEHF$  là tứ giác nội tiếp**

Xét tứ giác  $AEHF$  có:  $\angle AFH + \angle AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này đối diện nhau trong tứ giác  $AEHF$  nên tứ giác  $AEHF$  là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm  $M$  đường kính  $BC$  (đhnb).

**2. Chứng minh các đường thẳng  $ME$  và  $MF$  là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEHF$ .**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AH$  suy ra  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEHF$ .

$\Rightarrow IH = IF \Rightarrow \Delta IAH$  cân tại  $I \Rightarrow \angle IFH = \angle IHF$  (tính chất tam giác cân).

Mà  $\angle IHF = \angle DHC$  (đối đỉnh)  $\Rightarrow \angle IFH = \angle DHC$  (1)

Do  $\triangle BFC$  vuông tại F, M là trung điểm của BC nên  $MF = \frac{1}{2}BC = MC$  (định lý đường trung tuyến trong tam giác vuông)  $\Rightarrow \triangle MFC$  cân tại M  $\Rightarrow \angle MFH = \angle MCF$  (2)

Cộng (1) với (2) ta được:  $\angle MFH + \angle IFH = \angle DHC + \angle MCF = 90^\circ$  (Do tam giác  $CDH$  vuông tại D).

Suy ra:  $\angle MFI = 90^\circ$  hay  $IF \perp MF$ .

Vậy MF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF.

Chứng minh tương tự ta được ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF.

### 3. Chứng minh $DE + DF \leq BC$ .

Giả sử  $DE + DF \leq BC \Leftrightarrow (DE + DF).BC \leq BC^2 \Leftrightarrow DE.BC + DF.BC \leq BC^2$ .

Dễ dàng chứng minh được các tứ giác ACDF, ABDE là các tứ giác nội tiếp nên ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= (BD + CD).BC \\ &= BD.BC + CD.BC \\ &= BF.BA + CE.CA \end{aligned}$$

Xét  $\triangle BDF$  và  $\triangle BAC$  có:

$\angle ABC$  chung;

$\angle BFD = \angle BCA$  (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp ACDF)

$\Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle BAC$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DF}{AC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow DF.BC = AC.BF \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có  $\triangle CDE \sim \triangle CAB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow DE.BC = AB.CE$  (2)

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} DF.BC + DE.BC &= AC.BF + AB.CE \\ \Rightarrow (DE + DF).BC &= AC.BF + AB.CE \end{aligned}$$

Vì  $(DE + DF).BC \leq BC^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AC.BF + AB.CE &\leq BF.BA + CE.CA \\ \Rightarrow BF.BA + CE.CA - AC.BF - AB.CE &\geq 0 \\ \Leftrightarrow AC(CE - BF) + AB(BF - CE) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (CE - BF)(AC - AB) &\geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $AC \geq AB$ , khi đó ta cần chứng minh  $CE - BF \geq 0 \Leftrightarrow CE \geq BF$ .

Áp dụng định lí Pytago ta có:  $\begin{cases} CE^2 = BC^2 - BE^2 \\ BF^2 = BC^2 - CF^2 \end{cases}$ .

$$\text{Mà } \begin{cases} 2S_{\triangle ABC} = BE \cdot AC = CF \cdot AB \\ AB \leq AC \end{cases} \Leftrightarrow BE \leq CF.$$

$\Rightarrow CE^2 \geq BF^2 \Rightarrow CE \geq BF \Rightarrow (*)$  đúng nên giả sử ban đầu là đúng.

Vậy  $DE + DF \leq BC$ .

**Câu V (1,0 điểm):**

**Cách giải:**

Cho ba số thực  $x, y, z$  thay đổi thỏa mãn các điều kiện  $x > \frac{1}{4}, y > \frac{1}{3}, z > \frac{1}{2}$  và  $\frac{4}{4x+3} + \frac{3}{3y+2} + \frac{2}{2z+1} \geq 2$ .

. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q = (4x-1)(3y-1)(2z-1)$ .

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{4}{4x+3} + \frac{3}{3y+2} + \frac{2}{2z+1} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{4x+3} &\geq \left(1 - \frac{3}{3y+2}\right) + \left(1 - \frac{2}{2z+1}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{4}{4x+3} &\geq \frac{3y-1}{3y+2} + \frac{2z-1}{2z+1} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{4x+3} &\geq 2\sqrt{\frac{3y-1}{3y+2} \cdot \frac{2z-1}{2z+1}} \quad (\text{BDT Co-si}) \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{3}{3y+2} \geq 2\sqrt{\frac{4x-1}{4x+3} \cdot \frac{2z-1}{2z+1}}; \quad \frac{2}{2z+1} \geq 2\sqrt{\frac{4x-1}{4x+3} \cdot \frac{3y-1}{3y+2}}$$

Nhân vế theo vế 3 BDT trên ta được:

$$\begin{aligned} \frac{4}{4x+3} \cdot \frac{3}{3y+2} \cdot \frac{2}{2z+1} &\geq 2\sqrt{\frac{3y-1}{3y+2} \cdot \frac{2z-1}{2z+1}} \cdot 2\sqrt{\frac{4x-1}{4x+3} \cdot \frac{2z-1}{2z+1}} \cdot 2\sqrt{\frac{4x-1}{4x+3} \cdot \frac{3y-1}{3y+2}} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{4x+3} \cdot \frac{3}{3y+2} \cdot \frac{2}{2z+1} &\geq 8 \frac{4x-1}{4x+3} \cdot \frac{3y-1}{3y+2} \cdot \frac{2z-1}{2z+1} \\ \Leftrightarrow 24 &\geq 8Q \Leftrightarrow Q \leq 3 \end{aligned}$$

Vậy  $Q_{\max} = 3$ . Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow (x; y; z) = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6}; 1\right)$ .