

Cinématique du point

Définition :

Un Référentiel : c'est un système de coordonnées de l'espace de dimension 3 dont l'origine est un corps ponctuel réel ou imaginaire lié à un observateur ce dernier est d'une horloge pour mesurer le temps.

Soit une base formée de vecteurs unitaire ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) et en considérant le point O comme l'origine de ce repère ; le Référentiel est noté $R(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$ est peut être brièvement noté (R) ou R .

En mécanique classique : le temps est absolue

Equation horaire ou paramétrique du point mobile M :

Point mobile	En cartésien	En cylindrique	En sphérique
$\vec{OM}$	$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t)\end{aligned}$	$\begin{aligned}\rho &= \rho(t) \\\theta &= \theta(t) \\z &= z(t)\end{aligned}$	$\begin{aligned}r &= r(t) \\\theta &= \theta(t) \\\varphi &= \varphi(t)\end{aligned}$

La trajectoire du point M peut représenter dans plusieurs courbe

La Courbe : design certains sous -ensembles du plan , de l'espace usuel .

Par exemple : droite ,segment, cercle et les lignes polygonal

Les courbes quand peut bien les représenter sont des courbes algébrique

On peut les classé selon n degré

n =1 ; une droite

n =2 ; une conique

n =3 ; une courbe cubique

il existe des courbes on ne peut pas les représenter leur équation comme les courbe transcendant

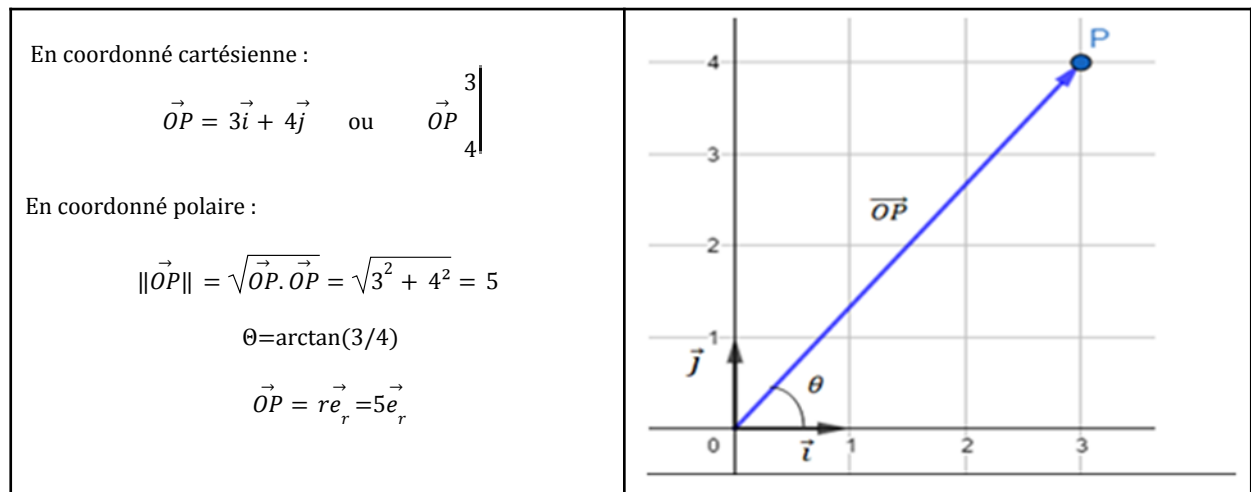
la trajectoire c'est l'ensemble des point occupé par le mobile

les bases sont formé de vecteur unitaire

La position

Le vecteur position ou rayon vecteur c'est le vecteur qui sert à indiquer la position d'un point par rapport à un repère .

L'origine fixe du repère et son autre extrémité à la position du point



Le vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl}$ ou $\vec{dr}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire

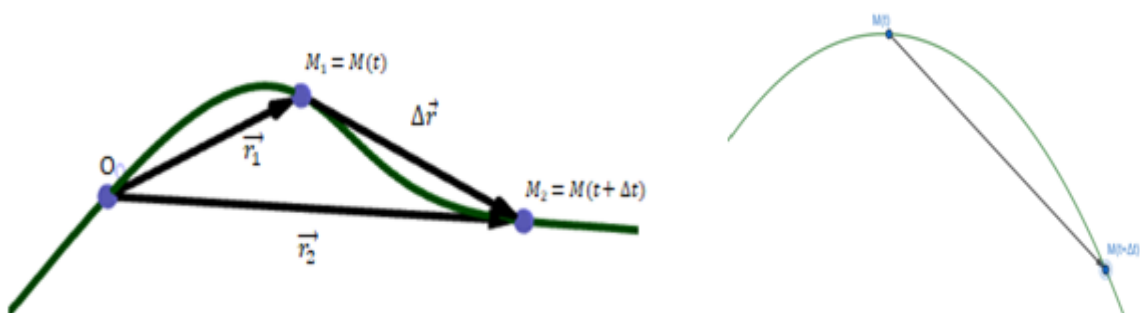
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (OB - OA)\vec{u} = \int_A^B dlu = \int_A^B \vec{dl}$$

rappelle :

Coordonné cartésienne	Coordonné cylindrique	Coordonné sphérique
$\vec{dl}_x = dx \vec{i}$	$\vec{dl}_\rho = d\rho \vec{e}_\rho$	$\vec{dl}_r = dr \vec{e}_r$
$\vec{dl}_y = dy \vec{j}$	$\vec{dl}_\theta = \rho d\theta \vec{e}_\theta$	$\vec{dl}_\theta = r d\theta \vec{e}_\theta$
$\vec{dl}_z = dz \vec{k}$	$\vec{dl}_z = dz \vec{e}_z$	$\vec{dl}_\varphi = r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

La vitesse moyenne d'un point

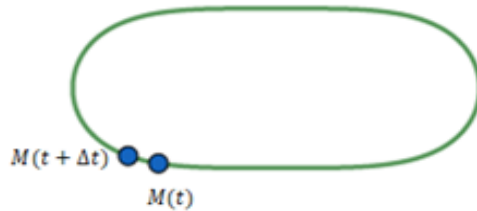
Soit un point M en mouvement dans un référentiel R et soit (C) ça trajectoire



La vitesse moyenne est une grandeur qui décrit la variation de la position en fonction du temps dans un intervalle du temps relativement important tel que Δr la variation de position

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad V_{moy} = \left\| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right\|$$

Attention :

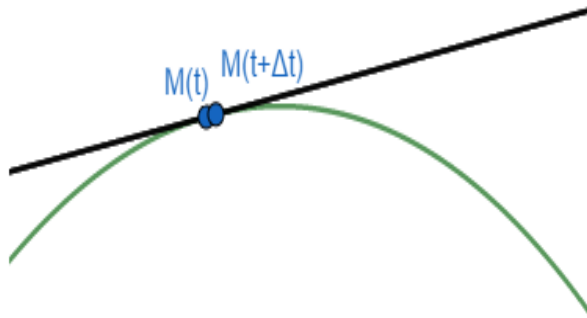
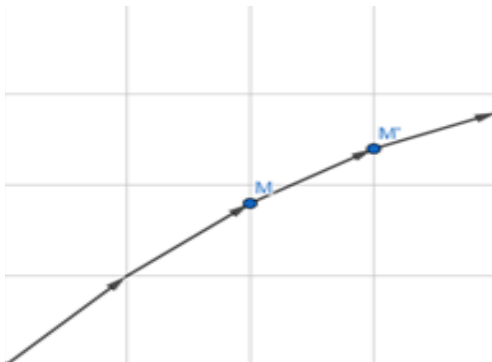


- Si $M(t) = M(t + \Delta t)$ alors $\Delta \vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{moy} = \vec{0}$ mais lors d'un tour complet $V_{moy} \neq 0$
- À ne pas confondre avec la vitesse moyenne d'un ensemble de point .

Soit N point $(M_i)_{0 \leq i \leq N}$ en mouvement

$$\vec{v} = \frac{1}{N} \sum_i^N \vec{v}_i$$

La vitesse instantané d'un point

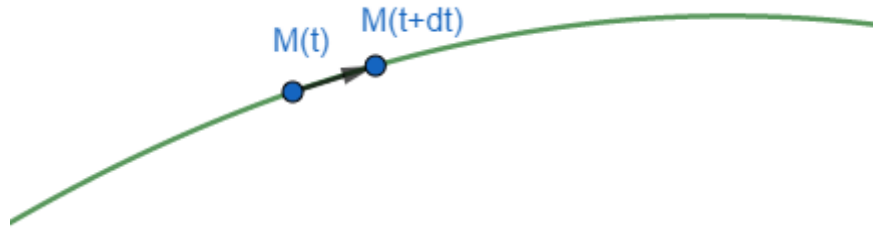


La vitesse instantanée est une grandeur qui décrit la variation de la position en fonction du temps en considérant le point suivant proche de tel façon pour qu'ils forme un segment entre eux avec une bonne précision alors $\Delta t \rightarrow dt$

$$\vec{v} = \vec{v}_{ins} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad v = v_{ins} = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

Remarque :

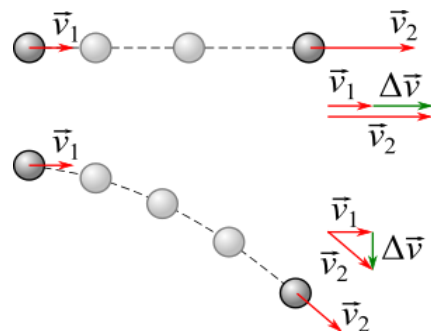
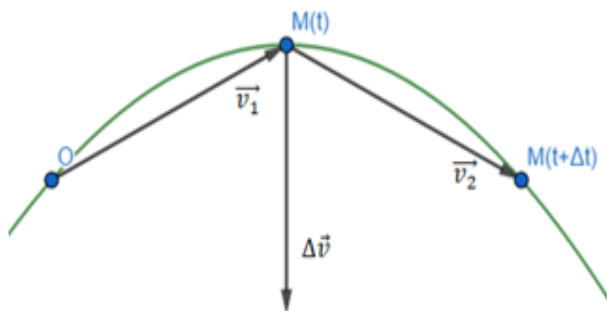
le vecteur vitesse instantané est toujours tangente a la trajectoire quel que soit le point .



Les composant du vecteur accélération selon les Trois coordonné :

Coordonné cartésienne	Coordonné cylindrique	Coordonné sphérique
$\vec{v}_x = \dot{x} \vec{i}$	$\vec{v}_\rho = \dot{\rho} \vec{e}_\rho$	$\vec{v}_r = \dot{r} \vec{e}_r$
$\vec{v}_y = \dot{y} \vec{j}$	$\vec{v}_\theta = \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta$	$\vec{v}_\theta = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
$\vec{v}_z = \dot{z} \vec{k}$	$\vec{v}_z = \dot{z} \vec{e}_z$	$\vec{v}_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

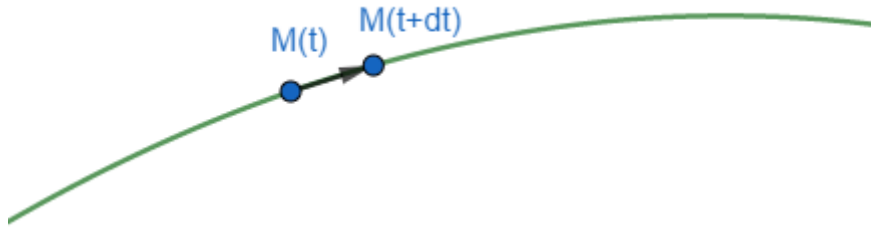
L'accélération moyenne d'un point



L'accélération moyenne est une grandeur qui décrit la variation de la vitesse en fonction du temps dans un intervalle du temps relativement important tel que Δv la variation de la vitesse

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad a_{\text{moy}} = \left\| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right\|$$

L'accélération instantané d'un point



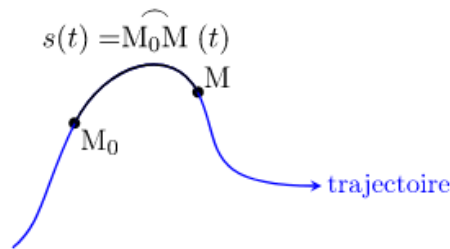
Les composant du vecteur accélération selon les Trois coordonné :

Coordonné cartésienne	Coordonné cylindrique	Coordonné sphérique
$\vec{a}_x = \ddot{x} \vec{i}$	$\vec{a}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho$	$\vec{a}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r$
$\vec{a}_y = \ddot{y} \vec{j}$	$\vec{a}_\theta = (\rho \ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$	$\vec{a}_\theta = (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - \frac{r}{2} \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta) \vec{e}_\theta$
$\vec{a}_z = \ddot{z} \vec{k}$	$\vec{a}_z = \ddot{z} \vec{e}_z$	$\vec{a}_\varphi = ((r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \sin \theta + (2 r \dot{\theta} \dot{\varphi}) \cos \theta) \vec{e}_\varphi$

Repère de Frenet

C'est un repère local, il dépend du point mobile c'est un choix pratique dans le cas d'une trajectoire curviligne plane, Le repère $(M(t); \vec{e}_T; \vec{e}_N; \vec{e}_B)$ ou $(M(t); \vec{T}; \vec{N}; \vec{B})$ à utiliser est orthonormé direct et mobile

Nous étudions le mouvement du point dans le repère $(M(t); \vec{e}_T; \vec{e}_N)$



L'abscisse curviligne est une sorte de variante algébrique pour mesurer la longueur d'un arc

$$M(t) = s(t)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r d\theta^2$$

La vitesse dans la base Frenet

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Le vecteur tangent unitaire est un vecteur qui se dirige vers le sens d'accroissement positif du mouvement

$$\vec{e}_T = \frac{d\vec{OM}}{\|d\vec{OM}\|} = \frac{d\vec{s}}{ds}$$

La vitesse est toujours tangentielle à la trajectoire

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{s}}{ds} = v \vec{e}_T$$

La vitesse n'a pas de composant dans l'axe $(M(t), \vec{e}_N)$

On déduit que

$$\vec{v} = (v \cdot \vec{e}_T) \vec{e}_T + (v \cdot \vec{e}_N) \vec{e}_N$$

$$\vec{v} = v \vec{e}_T$$

L'accélération dans la base Frenet

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Attention :

Il existe une vitesse v dans la quel $dv = 0$ or $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \neq \frac{dv}{dt} \vec{e}_T$

$$\|\vec{e}_T\| = 1 \Leftrightarrow \vec{e}_T^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow d(\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{e}_T \cdot d\vec{e}_T = 0$$

Donc $\vec{e}_T \perp d\vec{e}_T$ et comme $\vec{e}_T$ dépend de l'abscisse curviligne s

Alors
$$\vec{e}_T \cdot \frac{d\vec{e}_T}{ds} = 0$$

On en déduit que

$$\vec{e}_N = \frac{\frac{d\vec{e}_T}{ds}}{\|\frac{d\vec{e}_T}{ds}\|} \Leftrightarrow \frac{d\vec{e}_T}{ds} = \|\frac{d\vec{e}_T}{ds}\| \vec{e}_N$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = \gamma_c \vec{e}_N = \frac{\vec{e}_N}{\rho_c}$$

γ_c : Courbure algébrique de la courbe

ρ_c : Rayon de courbure

$$\rho_c = \frac{1}{\gamma_c}$$

Le rayon de courbure indique le niveau d'incurvation

Quand le rayon ρ_c augmente la courbe se rapproche d'une droite

Quand le rayon ρ_c se diminue la courbe devient de plus en plus courbe

On déduit que

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\vec{a} \cdot \vec{e}_T) \vec{e}_T + (\vec{a} \cdot \vec{e}_N) \vec{e}_N \\ &= \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{1}{\rho_c} \left(\frac{d}{dt} (v \vec{e}_T) \cdot \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right) \vec{e}_N \\ &= \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v}{\rho_c} \left(\frac{d\vec{e}_T}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right) \vec{e}_N \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{\rho_c} \vec{e}_N$$

Propriété

- La composant indique la monotonie de la vitesse et si elle est nulle le mouvement est uniforme
- Quel que soit la concavité de la trajectoire la composant normal est toujours positive
- La composant normal est toujours tourné vers le centre de la courbure
- Quand la composant normal augment le rayon de courbure diminue c'est ce qu'on appelle virage serré
- La composant normal est nul si le mouvement est rectiligne

Dans un mouvement circulaire uniforme

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_T = \pm r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e}_N = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Dynamique d'un point

C'est l'étude des causes du mouvement ou les interactions ou les forces

La masse est une caractéristique intrinsèque de la matière. La masse d'un point matériel est la quantité de la matière qui le constitue.

Le poids d'un point matériel dépend de l'intensité du champ de la pesanteur dans lequel est placé

Vecteur quantité du mouvement Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m se déplaçant avec une vitesse est donné par Ce vecteur dépend du référentiel dans lequel est exprimée la vitesse. Il est colinéaire à la vitesse du point et s'exprime en $kg.ms^{-1}$

Le Système Isolé est un corps qui est soumis par aucune force

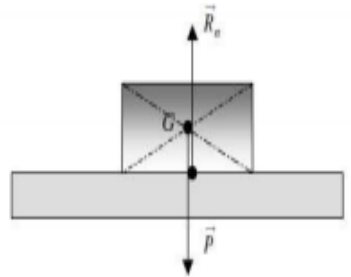
Le Système Pseudo-Isolée est un corps où la somme des forces extérieur appliquer sur lui est nulle

Force à distance

On appelle force de gravitation ou force d'interaction gravitationnelle, la force exercée par une masse M sur une autre masse m . Cette force d'interaction suit une loi énoncée par Newton en 1650 et qui précise que deux masses m et M interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite. La loi qu'il a formulée est dite « loi de la gravitation de Newton » ou « loi d'attraction universelle ». Elle s'énonce de la façon suivante :

Force de contact

La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance du support s'appelle **réaction du support**. La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette action par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.

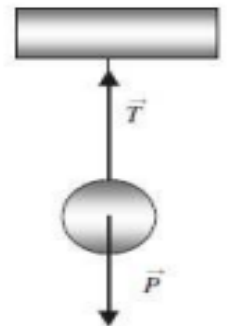


Avec vecteur unitaire dans la direction de la déformation.

C'est la force qu'exerce le fil sur l'objet placé à son extrémité.

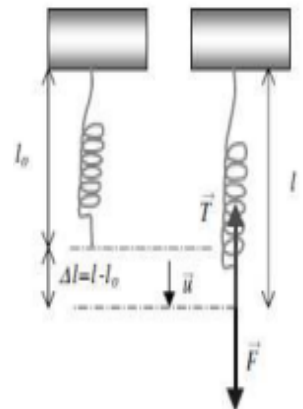
Lorsqu'un opérateur tire sur une extrémité d'un fil (l'autre extrémité étant fixe), celui-ci se tend. Simultanément, le fil exerce une résistance, c'est-à-dire une action sur l'opérateur. Cette action du fil sur l'opérateur est appelée tension du fil. Elle n'existe que si le fil est tendu sous l'effet d'une action extérieure.

Pour un fil de masse négligeable supportant un objet de masse m au repos, **la tension du fil** (action du fil sur la masse) s'oppose au poids de la masse m (action de la masse m sur le fil) d'après le principe des actions réciproques. Elle prend la même valeur en tout point du fil.



Tension d'un ressort Lorsque le fil est élastique, la tension du fil peut s'exprimer en fonction de l'état d'étirement du fil et augmente linéairement avec son allongement (à condition de ne pas exercer une force très importante). Le coefficient d'allongement s'appelle la raideur K du fil.

Un exemple typique de fil élastique est le ressort. La force de tension d'un ressort de longueur non tendu et étiré à la longueur s'écrit :



Le signe $-$ dans cette relation signifie que la force de tension du ressort est une force de rappel et qu'elle s'oppose à la déformation.

Exemple : Pendule simple

Considérons une masse m mobile autour d'un axe fixe. La distance de la masse m à l'axe de rotation est appelée l (figure 3.20). On considère le mouvement du système masse m par rapport à un référentiel galiléen $R(O, x, y, z, t)$. La base choisie est la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. Les forces extérieures appliquées sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil. La relation fondamentale de la dynamique conduit à :

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{T} &= m\vec{a}_{G/R} \\ m(-l\ddot{\theta}\vec{u}_\rho + l\dot{\theta}\vec{u}_\theta) &= \vec{P} + \vec{T}\end{aligned}$$

En projection sur les vecteurs de base, le poids et la tension s'écrivent :

$$\vec{P} \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{T} \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \\ -mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} \end{cases}$$

De la seconde équation, il est possible d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse m :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Cette équation est une équation différentielle *non linéaire* à cause de la présence du terme en sinus. La solution n'est donc pas facile à obtenir sauf si dans certaines conditions l'équation peut être assimilée à une équation linéaire. Cette condition est satisfaite dans le cas où l'angle θ est petit, c'est-à-dire lorsque le sinus est assimilable à l'angle, soit $\sin \theta \simeq \theta$. Dans ce cas, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution de cette équation s'écrit :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

à condition de poser $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

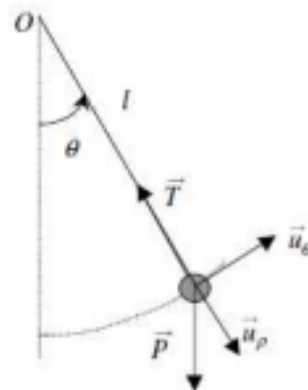


Figure 3.20 • Représentation d'un pendule simple.

Changement de référentiel

Soit $R(O; \vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$ un référentiel galiléen fixe ou absolue et soit $R'(O'; \vec{e}_x'; \vec{e}_y'; \vec{e}_z')$ un référentiel relatif mobile

Le mouvement de translation

Le référentiel (R') est en translation par rapport au référentiel (R)

Translation rectiligne

$$\vec{OO'} = OO' \vec{e}_X = OO' \vec{e}_{X'}$$

$$\vec{OO'} = \vec{OM} - \vec{OM}$$

$$\vec{v}_{O'/R} = v_{O'} \vec{e}_X = v_{O'} \vec{e}_{X'}$$

Translation circulaire

$$\vec{v}_{O'/R} = \vec{\omega}_{O'/R} \wedge \vec{OO'}$$

Vitesse angulaire $\vec{\omega}_{O'/R} = \dot{\theta}$

Le mouvement de rotation

Le référentiel (R') est en rotation par rapport au référentiel (R)

La rotation va être décrite avec $\vec{\Omega}_{R'/R}$ vitesse angulaire de rotation de référentiel

Formule de Varion

Soit un vecteur $\vec{X}(t)$ une grandeur vectorielle dans un référentiel mobile (en rotation et en translation)

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{X}$$

$\vec{\Omega}_{R'/R}$ est souvent égale à $\vec{\Omega}_{R/R'}$

Etudes énergétique

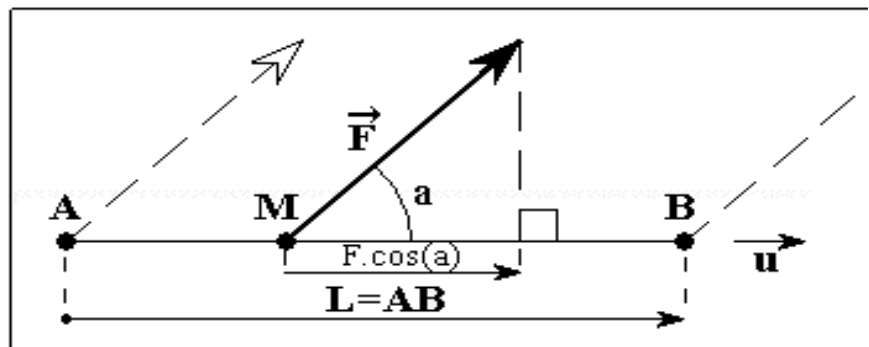
Travail et puissance

Travail d'une force

Soit AB une distance non nul

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{AB} \\ = F \cdot AB \cos(a) \end{aligned}$$

Travail motrice si



Travail nulle si

Travail résistant si

Travail élémentaire

Energie cinétique

Energie potentielle et force conservatrice

Opérateur Gradient

Considérons l'espace rapporté à un repère orthonormé (O, x, y, z) . Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire des trois variables x, y, z . Considérons un champ scalaire, dont la valeur en $M(x, y, z)$ est $f(x, y, z)$.

En un point voisin M' de M , le champ aura pour valeur $f + df$

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

df représente la variation de f lorsque l'on passe du point $M(x, y, z)$ au point

$M'(x + dx, y + dy, z + dz)$. Le vecteur déplacement en coordonnée cartésienne

$$d\vec{OM} = d\vec{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$f(x, y, z) \rightarrow \vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Ainsi, en déduit que :

$$df = \vec{grad} f \cdot d\vec{OM}$$

Relation que l'on utilise pour définir le gradient dans un système de coordonnées quelconques.

- **Signification de $\vec{grad} f$** : c'est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la fonction f dans l'espace.

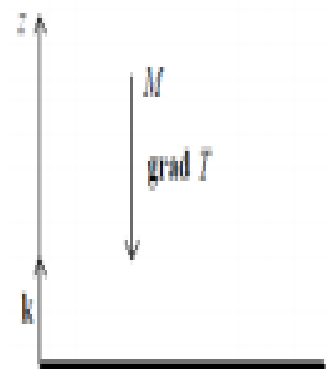
- **Exemple : Considérons l'atmosphère terrestre où la température en un point d'altitude z varie selon :**

C'est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la température.

Propriétés:

On a par définition Cette définition possède un caractère intrinsèque, c'est à c du repère utilisé.

Une surface de niveau est définie par l'équation $f(x, y, z) = cte$. Soit $f(M)$ soit la surface de niveau définie par $f(M) = \lambda(constante)$.



Direction de gradient :

Soit M et M' appartenant à la surface de niveau. Faisons subir au point M un déplacement élémentaire $d\vec{OM} = d\vec{M} = d\vec{l}$ sur la surface de niveau et on a $f(M)=f(M')$

Sur une surface de niveau, la fonction f est donc constante. Ainsi, pour tout déplacement élémentaire sur cette surface, la variation de f est nulle. On a donc

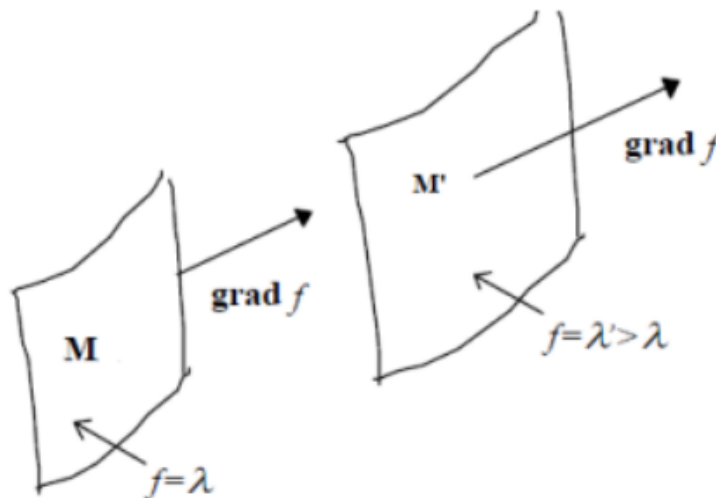
$$df = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{OM}$$

Le vecteur est normal aux surfaces de niveau.

Sens de gradient

Lorsque l'on passe d'une surface de niveau à une surface voisine correspondant à une plus grande valeur de f ($df > 0$), la même relation $df = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{OM} > 0$ montre que

L'Opérateur est dirigé suivant les valeurs croissantes de f



Expressions du gradient

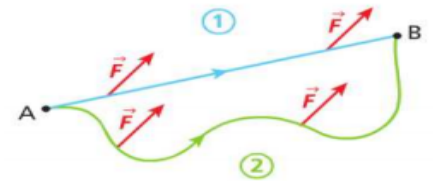
L'expression du gradient dépend de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

En coordonné cartésienne	En coordonné cylindrique	En coordonné Sphérique
$\left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$	$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$	$\left(\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$

-Force Conservative

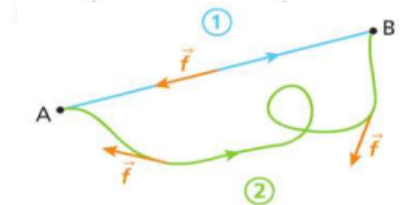
Cette force est constant par rapport à leur déplacement comme le poids, Tension du fil ... etc



-Force non Conservative $\Rightarrow (W(\vec{F}) \text{ depend du chemin suivie})$

Cette force varie en fonction de la position comme la force de frottement

..



$$W_{AB}(\vec{F})_{\text{trajet 1}} \neq W_{AB}(\vec{F})_{\text{trajet 2}}$$

Energie potentiel

le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et final. Le travail de ces forces peut donc s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle E_p . la variation d'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives soit :

$$E_p(B) - E_p(A) = - (W_c)$$

$$\Delta E_p = - (W_c)$$

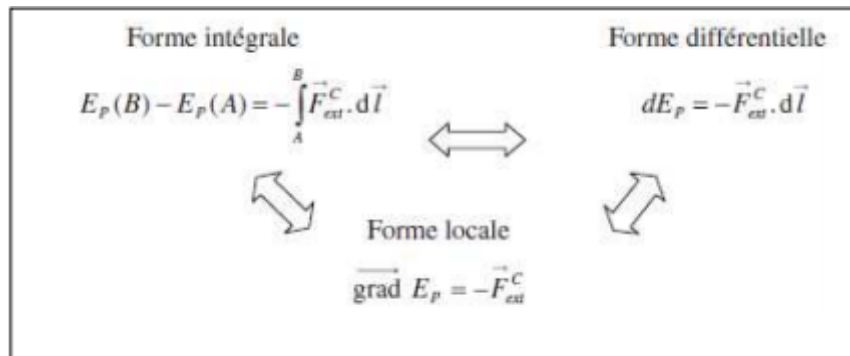
De l'expression intégrale, il est possible de déduire la définition différentielle de l'énergie potentielle en faisant apparaître le travail élémentaire de la force conservative extérieur soit : Finalement la différentielle de l'énergie potentielle peut s'exprimer en fonction du gradient de E_p .

$$dE_p = \vec{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l}$$

On aboutit à la définition locale de l'énergie potentielle :

$$\vec{\text{grad}} E_p = -\vec{F}_c$$

Les trois formes précédentes sont équivalentes entre elles comme l'indique la figure récapitulative ci-dessus



Exemples d'énergie potentielle

Énergie potentielle de pesanteur. E_{pp} En reprenant les résultats obtenus, nous avons avec

l'axe Oz, axe vertical ascendant :

$$(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = E_{pp}(A) - E_{pp}(B)$$

Par comparaison avec la relation intégrale, il apparaît clairement que nous pouvons définir la fonction énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(z)$ par :

$$E_{pp}(z) = mgz + C$$

Cette fonction est définie à une constante C près qu'il convient de fixer. La détermination de cette constante se fait par le choix arbitraire du zéro de la fonction énergie potentielle.

En général, l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle en $z = 0$ ce qui impose

$C = 0$. Ce choix entraîne que

$$E_{pp}(z) = mgz$$

Remarques

- Le calcul de l'énergie potentielle de pesanteur se fait tout aussi simplement à partir de la relation différentielle :

$$dW(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mg\vec{e}_z \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = -mgdz = -dE_{pp}$$

Nous obtenons immédiatement l'expression de la fonction énergie potentielle

$E_p = mgz$, en choisissant la constante nulle comme précédemment

- Si l'axe Oz est orienté vers le bas (axe vertical descendant) nous obtenons :

$$dW_p = \vec{P} \cdot d\vec{l} = - mg \vec{e}_z \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z) = - mg dz$$

et l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur devient :

$$E_{pp} = - mgz$$

Il faut donc bien préciser l'orientation choisie pour l'axe Oz pour utiliser la bonne expression de l'énergie potentielle. Un bon moyen de vérifier si l'expression utilisée est correcte consiste à vérifier que l'énergie potentielle de pesanteur augmente toujours avec l'altitude.

Énergie potentielle élastique. En reprenant les résultats obtenus précédemment, nous voyons que :

$$(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{l} = - k dx = - d\left(\frac{1}{2} k x^2\right) = - dE_{pe}$$

$$W_{x_1 \rightarrow x_2}(\vec{T}) = - k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} k (x_1^2 - x_2^2)$$

L'énergie potentielle élastique E_{pe} correspond donc à :

$$E_{pp} = \frac{1}{2} k x^2 + c$$

Il est logique de choisir l'énergie potentielle nulle pour une déformation nulle. La constante C est alors nulle et nous obtenons finalement

$$E_{pp} = \frac{1}{2} k x^2$$