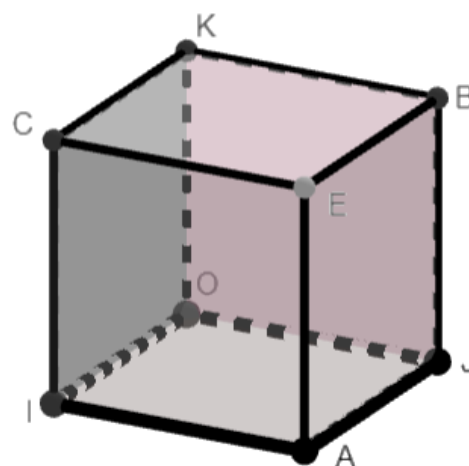


Exercice N°1(6 pts)

Dans la figure ci-contre $OIAJKCEB$ est un cube.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O, \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$.



- 1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b- En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z - 2 = 0$.

- 2) Soit $D(2, -1, 4)$ et $M(m + 2; m - 1; m + 4)$ où $m \in \mathbb{R}^*$.

a- Montrer que la droite (MD) est perpendiculaire au plan (ABC) .

b- Déterminer alors les coordonnées du point H projeté orthogonal de D sur (ABC) .

- 3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 12 = 0$$

a- Montrer que (S) est la sphère de centre D et de rayon 3.

b- Montrer que (S) coupe (ABC) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c- Montrer que la droite (BC) est tangente à la sphère (S) en un point K dont on ne souciera pas de chercher les coordonnées.

d- Déterminer alors la droite perpendiculaire commune aux droites (BC) et (DH) .

- 4) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln^2 x - 2 \ln \ln x + 4.$$

a- Montrer que $g'(x) = 2 \frac{\ln \ln x - 1}{x}$.

b- Dresser le tableau de variation de g .

c- Tracer (C_g) .

d- On considère le point $N(1 + \ln^2 \alpha; 1 - 2 \ln \alpha; 4)$ où $\alpha \in]0; +\infty[$.

i) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à

$$V(\alpha) = \frac{1}{6} g(\alpha).$$

- ii) En déduire que $V(\alpha)$ est minimal si et seulement si $N = D$.

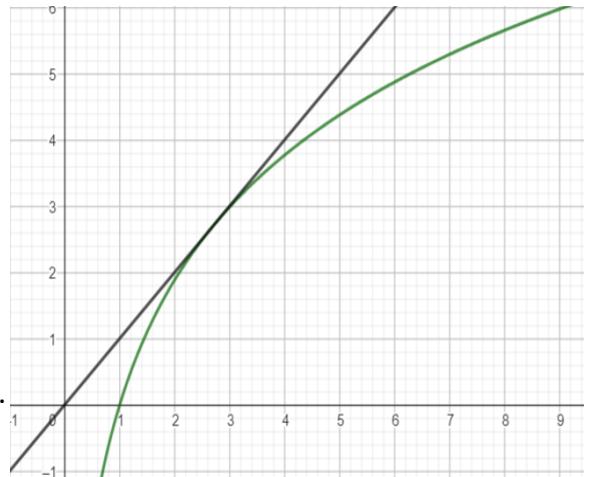
Exercice N°2(4 pts)

Dans le graphique ci-contre

C la courbe de la fonction g définie par :

$g(x) = e \cdot \ln x$ et D la tangente à la courbe

Au point d'abscisse e et d'équation $y = x$



- 1) Montrer graphiquement que : $x - e \cdot \ln x \geq 0$
- 2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x) + e \cdot \frac{\ln x}{x} + \frac{e}{x}$.
 - a) Montrer que : $\forall x > 0 ; f'(x) = \frac{x - e \cdot \ln x}{x^2}$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f
 - c) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$
- 3) On définit la suite (I_n) par : $I_n = \int_1^e \frac{e}{x^n} (1 + \ln x) dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculer I_0
 - b) Vérifier que : $I_1 = A - 1$ et déduire I_1
 - c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente
 - d) Montrer que : $\forall x \in [1, e] ; \frac{1}{x^n} \leq \frac{1 + \ln x}{x^n} \leq \frac{2}{x^n}$ et déduire I_n

Exercice N°3 (4 pts)

Un gardien de but doit faire face à un certain nombre de tir direct (**penalties**).

Les expériences précédentes montrent que :

- S'il a arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (le $(n + 1)^{\text{ième}}$) est $\frac{4}{5}$.
- S'il a laissé passer le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (le $(n + 1)^{\text{ième}}$) est $\frac{3}{5}$.
- La probabilité qu'il arrête le premier tir est $\frac{7}{10}$.

Soit A_n l'événement "le gardien arrête le $n^{\text{ième}}$ tir" on a donc $p(A_1) = \frac{7}{10}$.

1)a- Donner $p(A_2/A_1)$ et $p(A_2/\overline{A_1})$ en déduire $p(A_2)$.

b- Calculer $p(A_1/A_2)$.

2) On pose $p(A_{n+1}) = p_{n+1}$ et $p(A_n) = p_n$.

a- Calculer pour $n \geq 1$, $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/\overline{A_n})$.

b- En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$

3) Soit $q_n = p_n - \frac{3}{4}$.

a- Montrer que (q_n) est une suite géométrique et en déduire q_n et p_n en fonction de n .

b- Calculer alors p_n

Exercice N°4(6 pts)

A) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 \ln \ln x - x + \frac{1}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Montrer que $f(x) \rightarrow +\infty$ et que $f(x) \rightarrow -\infty$.

b- Montrer que C admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = -x$.

2) a- Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b- Dresser le tableau de variation de f .

c- Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$

d- Montrer que $I(1, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe C .

3) a- Tracer la courbe C .

b- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe

des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

4) Soit $x > 0$

a- Vérifier que $f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$

b- En remarquant que $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} > 1$, montrer que $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$

et que : $\ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x(x+1)}$

B) Soit (U_n) la suite définie sur N^* par $U_n = \sum_{k=1}^n \ln^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de U_3

2) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante

b) Montrer que ; pour tout $k \in N^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

c) Montrer que ; pour tout $n \in N^*$, $U_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$.

d- En déduire que (U_n) est convergente vers un réel l