1. Складне навантаження бруса. Еквівалентні напружені стани та еквівалентні напруження

На практиці можливі випадки, коли під дією зовнішніх сил матеріал зазнає розтягу або стиску у двох і трьох напрямах, тобто матеріал перебуває в умовах складного (плоского або об'ємного) напруженого стану.

У напруженому тілі у двох взаємно перпендикулярних площадках діють найбільші та найменші напруги, яких називають головними. У цих площадках немає дотичних на пруг, тому їх називають головними.

У напруженому тілі можна виділити елементарний кубик, уздовж граней якого діятимуть лише головні нормальні напруги: найбільша за алгебраїчною величиною σ_1, проміжна σ_2 і найменша σ_3.

За розрахунку конструктивних елементів на міцність розрізняють три види напруженого стану:

- об'ємний, коли всі три головні напруги не дорівнюють нулю;

- плоский, коли одна головна напруга дорівнює нулю;

- лінійний, коли дві головні напруги дорівнюють нулю.

Досі розглядали випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах бруса виникають тільки нормальні напруги, які в кожній точці можна було додавати алгебраїчно.

Проте часто трапляються і мають велике практичне значення випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах виникають нормальні і дотичні напруги, розподілені нерівномірно і за різними законами. У таких випадках дослідно визначити величини, що характеризують міцність, неможливо, тому для оцінювання міцності деталі доводиться враховувати механічні характеристики цього матеріалу, добуті з діаграми розтягу.

Як відомо, міцність пластичних матеріалів на розтяг характеризують границею текучості, а крихких – границею міцності; ці напруги вважають граничними і залежно від них обчислюють допустимі напруги. Тому граничний напружений стан у пластичних матеріалів настає за появи залишкових деформацій, а крихких на початку руйнування.

Основне завдання теорії граничних напруг складається в розробці припущень, які дозволяють порівняти різнотипні напружені стани з точки зору близькості їх до граничного стану. Порівняння різнотипних напружених станів виконують за допомогою *еквівалентного напруженого стану*, а за еквівалентний береться найбільш вивчений напружений стан за простого розтягу.

Еквівалентною напругою називають таку умовну напругу одновісного розтягу, яка рівнонебезпечна заданому випадку поєднання основних деформацій.

2. Теорії міцності

Перехід до еквівалентного напруженого стану виконують за допомогою гіпотез міцності.

Гіпотези міцності – це наукові припущення про основні причини настання у матеріалі граничного напруження стану за поєднання основних деформацій.

Напружені стани під час поєднання основних деформацій і одновісного розтягу називатимемо рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо їх головні напруги відрізняються від граничної для цього матеріалу в однакову кількість разів, інакше кажучи, коефіцієнти запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Оцінювання міцності за теорією граничних напруг відбувається за такою схемою: перехід від складного напруженого стану до еквівалентного за допомогою гіпотез міцності, а потім еквівалентний напружений стан зіставляють з допустимою напругою на розтяг.

Таким чином, умова міцності для випадку поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах діють нормальні і дотичні напруги, матиме вигляд $\sigma_{екв} \leq [\sigma_p]$.

Сформулюємо і охарактеризуємо гіпотези міцності і наведемо відповідні формули для обчислення еквівалентних напруг.

1. Гіпотеза найбільших нормальних напруг (*перша теорія міцності*), була висунута Галілеєм у XVII столітті.

Причиною руйнування за цією гіпотезою є найбільші нормальні напруги розтягу σ_p і стиску σ_c, без врахування двох інших головних напруг.

Ця теорія дає досить задовільні результати тільки за розрахунку конструктивних елементів з крихких матеріалів.

Істотним протиріччям першої теорії міцності є те, що кубик за всебічному стиску, як показали досліди, витримує набагато більші напруги, ніж за простого стиску.

2. Гіпотеза найбільших відносних деформацій *(друга теорія міцності)* висунута в 1682 році Е. Маріоттом.

За цією теорією міцність матеріалу досягне критичного стану за максимального значення лінійної деформації ε. Цю теорію міцності для пластичних матеріалів не підтверджують досліди, але для крихких матеріалів її результативно узгоджено експериментом.

3. Гіпотеза найбільших дотичних напруг *(третя теорія міцності).*

Згідно з цією гіпотезою, яку запропонував у 1773 році Ш. Кулон, небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільші дотичні напруги досягають граничної величини, за якої можлива втрата міцності шляхом зсуву і ковзання однієї частини матеріалу по другій.

Гіпотеза найбільших дотичних напруг добре підтверджують досліди, особливо для пластичних матеріалів.

За цією гіпотезою для триосного напруженого стану $\sigma_{екв.} = \sigma_1 - \sigma_3$;

Для двоосного напруженого стану: $\sigma_{екв.} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$.

Тотожна з третьою теорією міцності гіпотеза Мора, яку запропоновано на початку XX ст. Згідно з цією гіпотезою небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли на деякій площадці трапляється найбільш несприятлива комбінація нормальної і дотичної напруг.

4. Енергетична гіпотеза *(четверта, або енергетична, теорія міцності).*

Під час деформації елементарної частинки тіла в загальному випадку змінюються його форму і об'єм. Таким чином, повна потенціальна енергія деформації складається з двох частин: енергії зміни форми і енергії зміни об'єму. Енергетична гіпотеза міцності за критерій переходу матеріалу до граничного стану приймає тільки енергію зміни форми.

Згідно з цією гіпотезою, яку запропоновано на початку XX ст., небезпечний стан матеріалу в цій точці настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми для цієї точки досягає граничної величини.

Формула для обчислення еквівалентних напруг для двоосного напруженого стану: $\sigma_{екв.} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$.

Розрахунки за гіпотезами міцності в багатьох випадках позбавляють проектувальників і конструкторів необхідності випробовувань конструкції на міцність.

3. Розрахунок бруса круглого поперечного перерізу на згин з крученням

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які зазвичай є прямими брусами круглого або кільцевого перерізу Для розрахунку валів братимемо до уваги тільки крутний і згинальний моменти, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруги відносно невеликі.

Максимальні нормальні і дотичні напруги для круглих валів обчислюють за формулами: $\sigma = \frac{M_{зг.}}{W_x}$, $\tau = \frac{M_K}{W_p}$, причому для круглих валів $W_p = 2W_x$.

У випадку одночасного згину і кручення небезпечними будуть точки небезпечного поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності, дістанемо:

$$\sigma_{екв.} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{зг}}{W_x}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{зг}}{W_x}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_к}{2 \cdot W_x}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{зг}^2 + M_к^2}}{W_x} .$$

Вираз, що стоїть в чисельнику, назвемо *еквівалентним моментом:*

$$M_{екв.} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_к^2},$$

тоді розрахункова формула для круглих валів матиме вигляд:

$$\sigma_{екв.} = \frac{M_{екв.}}{W_x} \le [\sigma].$$

За цією формулою круглі вали розраховують, як на згин, але не за згинальним, а за еквівалентним моментом.

За енергетичною теорією міцності $M_{екв.} = \sqrt{M_{зг.}^2 + 0{,}75 \cdot M_к^2}$.

Приклад розв'язку задачі

Для сталевого вала постійного поперечного перерізу рис. 1, який передає потужність P = 8 кВт, за кутової швидкості ω = 23 с$^{-1}$ необхідно: побудувати епюру крутних моментів; побудувати епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах; визначити необхідний діаметр вала.

Розрахунок виконати за гіпотезою найбільших дотичних напружень. Прийняти Fr = 0,37·F, [σ] = 55 МПа.

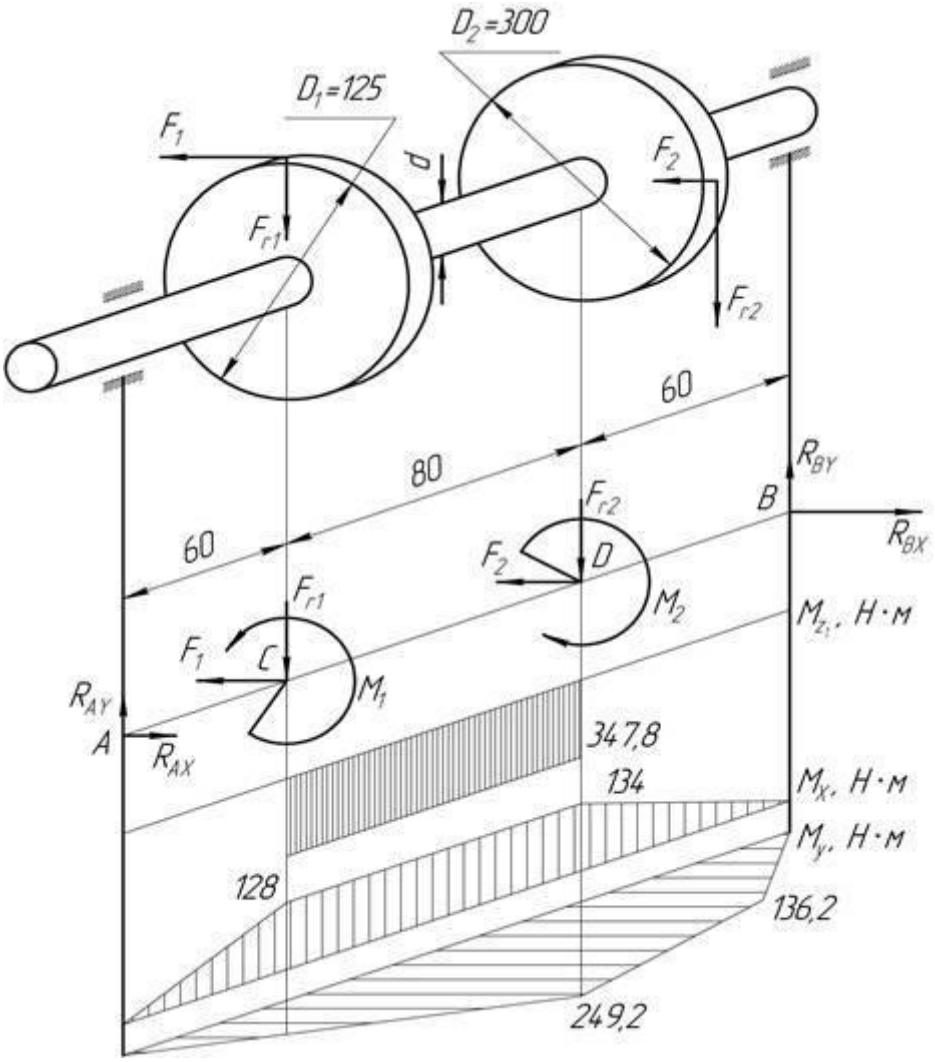

Рис. 1

<u>Розв'язок</u>

1) Визначаємо обертальний момент, що передає вал:

$$M_1 = M_2 = \frac{P}{\omega} = \frac{8 \cdot 10^3}{23} = 347{,}8\ Н \cdot м.$$

2) Визначаємо колові сили, що діють на зубчасті колеса:

$$F_1 = \frac{2 \cdot M_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 347{,}8}{0{,}125} = 5565\ Н; \qquad F_2 = \frac{2 \cdot M_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 347{,}8}{0{,}3} = 2319\ Н.$$

Ю-з

3) Визначаємо радіальні зусилля:

$$F_{r1} = 0{,}37 \cdot F_1 = 0{,}37 \cdot 5565 = 2059\ Н; \qquad F_{r2} = 0{,}37 \cdot F_2 = 0{,}37 \cdot 2319 = 858\ Н.$$

Складаємо розрахункову схему вала (рис. 1).

4) Визначаємо реакції опор у вертикальній площині:

$$\sum M_A = -F_{r1} \cdot AC - F_2 \cdot AD + R_{BY} \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_B = F_{r1} \cdot CB + F_2 \cdot DB - R_{AY} \cdot AB = 0.$$

$$R_{BY} = \frac{F_{r1} \cdot AC + F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{2059 \cdot 0{,}06 + 2319 \cdot 0{,}14}{0{,}2} = 2241\ Н;$$

$$R_{AY} = \frac{F_{r1} \cdot CB + F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{2059 \cdot 0{,}14 + 2319 \cdot 0{,}06}{0{,}2} = 2137\ Н.$$

Перевірка: $\sum F_Y = R_{AY} - F_{r1} - F_2 + R_{BY} = 2137 - 2059 - 2319 + 2241 = 0$.

Рівність $\sum F_Y = 0$, *отже* R_{AY} *і* R_{BY} *визначені правильно.*

5) Визначаємо реакції опор у горизонтальній площині:

$$\sum M_A = F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_{BX} \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_B = -F_1 \cdot CB - F_{r2} \cdot DB + R_{AX} \cdot AB = 0.$$

$$R_{BX} = \frac{F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{5565 \cdot 0{,}06 + 858 \cdot 0{,}14}{0{,}2} = 2270\ Н;$$

$$R_{AX} = \frac{F_1 \cdot CB + F_{r2} \cdot DB}{AB} = \frac{5565 \cdot 0{,}14 + 858 \cdot 0{,}06}{0{,}2} = 4153\ Н.$$

Перевірка: $\sum F_X = -R_{AX} + F_1 + F_{r2} - R_{Bx} = -4153 + 5565 + 858 - 2270 = 0$.

Рівність $\sum F_X = 0$, *отже* R_{AX} *і* R_{BX} *визначені правильно.*

6) Будуємо епюру крутних моментів MZ.

7) Визначаємо значення згинальних моментів MX у характерних перерізах у вертикальній площині і будуємо їх епюру:

$$M_{AX} = 0; \quad M_{CX} = R_{AY} \cdot AC = 2137 \cdot 0{,}06 = 128{,}22 \ H \cdot м;$$

$$M_{DX} = R_{AY} \cdot AD - F_{r1} \cdot CD = 2137 \cdot 0{,}14 - 2059 \cdot 0{,}08 = 134 \ H \cdot м; \quad M_{BX} = 0.$$

8) Визначаємо значення згинальних моментів МУ у характерних перерізах у горизонтальній площині і будуємо їх епюру:

$$M_{AY} = 0; \quad M_{CY} = -R_{AX} \cdot AC = -4153 \cdot 0{,}06 = -249{,}2 \ H \cdot м;$$

$$M_{DY} = -R_{AX} \cdot AD + F_1 \cdot CD = -4153 \cdot 0{,}14 + 5565 \cdot 0{,}08 = -136{,}2 \ H \cdot м; \quad M_{BY} = 0.$$

9) Визначаємо сумарні згинальні моменти в характерних перерізах вала:

$$M_{зг.C} = \sqrt{M_{CX}^2 + M_{CY}^2} = \sqrt{128{,}22^2 + (-249{,}2)^2} = 280 \ H \cdot м;$$

$$M_{зг.D} = \sqrt{M_{DX}^2 + M_{DY}^2} = \sqrt{134^2 + (-136{,}2)^2} = 191 \ H \cdot м.$$

10) Оскільки значення сумарного згинального моменту в перерізі C більше ніж у перерізі D, то переріз C є більш небезпечним. Тому еквівалентний момент визначаємо у перерізі C:

$$M_{екв.C}^{III} = \sqrt{M_{зг.C}^2 + M_Z^2} = \sqrt{280^2 + 347{,}8^2} = 446{,}5 \ H \cdot м.$$

11) Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{екв.C}}{0{,}1 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{446.5 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot 55}} = 43{,}2 \ мм.$$

Приймаємо діаметр вала d = 45 мм.