تمارين

I. صحيح أم خاطئ ؟

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

التمرين 1: لتكن f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$

1. إذا كانت f غير محدودة من الأعلى فإن $\lim_{+\infty} f = +\infty$
2. إذا كانت f متزايدة على $[0 ; +\infty[$ فإن $\lim_{+\infty} f = +\infty$
3. إذا كانت $\lim_{+\infty} f = +\infty$ فإن f غير محدودة من الأعلى.
4. إذا كانت $\lim_{+\infty} f = +\infty$ فإنه يوجد على الأقل مجال من الشكل $]A ; +\infty[$ تكون عليه f متزايدة

التمرين 2:

1. لتكن f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ حيث ، لدينا: $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
2. إذا كان، من أجل x عدد حقيقي، $|f(x) - 2| \le \frac{1}{x}$، فإن: $\lim_{+\infty} f = 2$
3. إذا كانت f غير محدودة من الأعلى على المجال $]0 ; 1]$، فإنها تقبل $+\infty$ كنهاية عند الصفر.
4. إذا حققت f : من أجل كل x من $]0 ; 2]$، $3 - |x - 1| \le f(x) \le 3 + (x - 1)^2$ فإن $f(x) = 3$
5. إذا كانت الدالة f تحقق، من أجل كل x من $[3 ; +\infty[$، $f(x) \ge \frac{2}{x}$ فإن f تقبل نهاية منتهية عند $+\infty$

التمرين 3:

1. الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ تقبل $+\infty$ كنهاية عند $-\infty$
2. إذا كانت $\lim_{+\infty} f = 0$ و $\lim_{+\infty} g = +\infty$ فإن $\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 0$
3. إذا كانت $\lim_{+\infty} f = -\infty$ و $\lim_{+\infty} g = +\infty$ فإن $\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = -1$
4. إذا كانت $\lim_{+\infty} f = -\infty$ و من أجل كل x موجب تماما، $g(x) > 0$ ، فإن $\lim_{+\infty} fg = -\infty$

التمرين 4:

1. إذا كانت $\lim_{-\infty} f = 1$ فإن $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{f(x) - 1} = +\infty$
2. إذا كانت $\lim_{+\infty} f = -\infty$ و $\lim_{+\infty} g = -\infty$ فإن $\lim_{+\infty} f \circ g(x) = -\infty$
3. إذا كانت $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim_{+\infty} f(x^2) = 0$
4. إذا كانت $\lim_{+\infty} f = +\infty$ فإن $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{(x)}+1} = 0$

التمرين 5:

1. إذا كانت f مستمرة على $[a ; b]$ و $f(a).f(b) > 0$ فإن f لا تنعدم على المجال $[a ; b]$
2. إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على $[a ; b]$ و $f(a).f(b) < 0$ فإن f تنعدم على الأقل مرة على $[a ; b]$
3. الدالة f المعرفة على $[\ 2 ; 0]$ بـ: $\{f(x) = x \sin \sin \frac{1}{x} \quad si\ x > 0 \quad f(0) = 0$ مستمرة على $[\ 2 ; 0]$

التمرين 6: المستوي مزود بالمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. C التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $R-\{1\}$ ، و D مستقيم معادلة له $x = 1$

1. إذا كان D مستقيم مقارب للمنحنى C فإن $\lim_{x\to+\infty} f = 1$
2. إذا كانت $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ ، فإن D مستقيم مقارب للمنحنى C
3. كانت f غير معرفة عند 1، فإن D مستقيم مقارب للمنحنى C.
4. إذا كانت $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ ، فإن D مستقيم مقارب للمنحنى C.

التمرين 7:

1. من أجل كل عدد حقيقي x ، إذا كان $x > 0$ و $f(x) > \frac{2}{x}$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
2. من أجل كل عدد حقيقيx، إذا كان $x > 0$ و $1 - \frac{3}{x} \le f(x) \le 1 + \frac{3}{x}$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
3. من أجل كل عدد حقيقي x ، إذا كان $x > 0$ و $1 + \frac{5}{x} \le f(x) \le 2 + \frac{5}{x}$ فإن $1 \le \lim_{x\to+\infty} f(x) \le 2$
4. إذا كان $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ فإن التمثيل البياني للدالة f لا يقطع المستقيم ذي المعادلة $y = -2$
5. f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث: $f(x) = x + 2 - \frac{4}{x - 1}$ و $g(x) = x + 2 + \frac{4x}{x - 1}$

المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) و لـ (C_g)

II. أسئلة متعددة الاختيار (Q C M)

التمرين8: عدة أجوبة صحيحة يمكن أن تكون صحيحة. عينها.

1. لتكن f دالة معرفة على R حيث: $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 1$ ، إذن يمكن استنتاج أن:

ج1: $\lim_{+\infty} f(x) = x^2+1$ ج2: $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ ج3: $\lim_{+\infty}\left[f(x)-x^2\right] = 1$ ج4: $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$

2. لتكن f دالة مستمرة على R حيث: $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$ و $f(0)=0$ ، إذن يمكن استنتاج أن:

ج1: $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$ ج2: يوجد عدد حقيقي موجب تماما A، حيث من أجل كل عدد x من $]A ; +\infty[$ لدينا: $f(x) < 0$

ج3: يوجد عدد حقيقي موجب تماما A، f متناقصة على $]A ; +\infty[$

ج4: في معلم للمستوي، المستقيم ذو معادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f

3. لتكن f دالة مستمرة على R حيث: $\lim_{1} f(x) = 2$ ، إذن يمكن استنتاج أن:

ج1: $\lim_{-1} f(-x) = 2$. ج2: $\lim_{0} f(1-x) = -2$ ؛ ج3: $\lim_{1} f\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ ؛ ج4: $\lim_{+\infty} f\left(1+\frac{x}{2}\right) =$

4. لتكن f و g دالتان معرفتان على R - {1} حيث: $\lim_{1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{1} g(x) = -\infty$ ، إذن يمكن استنتاج أن: ج1: $\lim_{1}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. ج2: $\lim_{1}\frac{f(x)}{g(x)} = -1$ ؛ ج3: $\lim_{1}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. ج4: $\lim_{1}\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$

5. f و g دالتان معرفتان على R بـ: $f(x)=(2x+1)^2$ و $g(x) = \sqrt{4x^2+1} - \sqrt{2}$ ، يمكن استنتاج أن:

ج1: $\lim_{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x} = 0$ ج2: $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ج3: $\lim_{1}[f(x)-g(x)] = 0$ ج4: $\lim_{1}[f(x)-g(x)] = +\infty$

6. f و g و h دوال معرفة على $[0 ; +\infty[$ تحقق من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ ، $g(x) \le f(x) \le h(x)$

-1 إذا كانت $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$ ، فإن:

ج1: $\lim_{+\infty} h(x) = -\infty$ ج2: f محدودة من الأعلى ج3: $\lim_{+\infty} g(x) = -\infty$ ج4: h ليس لها نهاية عند $+\infty$

-2 l عدد حقيقي غير معدوم. إذا كان من أجل كل x من $]A ; +\infty[$، $h(x)= 2g(x)$ و $\lim_{+\infty} g(x) = l$ فإن:

ج1: $\lim_{+\infty} f(x) = l$. ج2: $\lim_{+\infty} h(x) = +\infty$ ج3: $\lim_{+\infty}[h(x)-g(x)] = l$ ج4: f ليس لها نهاية عند $+\infty$

-3 إذا كانت، من أجل $x > 0$ ، $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$ و $h(x) = \frac{2x^2+3}{x^2}$ فإن:

ج1: $\lim_{+\infty} f(x) = 2$. ج2: $\lim_{+\infty} h(x) = 0$. ج3: $\lim_{+\infty} g(x) = l$ 2 . ج4: f ليس لها نهاية عند $+\infty$

التمرين9: إختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة

1. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+4}$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\dots$: ج1: $-\frac{1}{4}$ ج2: 2 ج3: 0

2. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$-{2} حيث: $f(x)=\frac{4-3x}{x+2}$

منحنى الدالة f (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته: ج1: $y=4$ ج2: $y=-3$ ج3: $y=-2$

3. f و g دالتان يحققان الشرطين $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $f(x)\ge g(x)$. إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dots$ ج1: 0 ج2: $-\infty$ ج3: $+\infty$

4. f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ و تمثيلها البياني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته: $y=-\frac{3}{2}$ معناه ...

ج1: $f(x)=-\frac{3}{2}x$ ج2: $\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)=-\infty$ ج3: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$

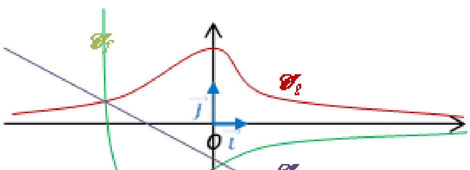
III. تمارين تطبيقية

التمرين10: f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$

برهن أنه من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$، $-\frac{1}{\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{3}{\sqrt{x}}$. استنتج أن f تقبل نهاية عند $+\infty$

التمرين11: البيان التالي يمثل التمثيلات البيانية C_g و C_f و C_h للدوال f و g و h المعرفة على R. محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$ و للمنحنى C_g عند $+\infty$ و عند $-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و C_h مستقيم.

عين، إن أمكن، النهايات عند $+\infty$ و عند $-\infty$ للدوال التالية: $f+g$ ؛ $f-g$ ؛ fg ؛ fh ؛ $g+h$ ؛ $\frac{f}{g}$ ؛ ؛ $\frac{f}{h}$ ؛ $\frac{g}{h}$.



التمرين12: باستعمال جدول تغيرات الدالة f عين مجموعة تعريفها و النهايات عند حدود مجموعة التعريف

:1

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-3	↗	1

:2

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

:3

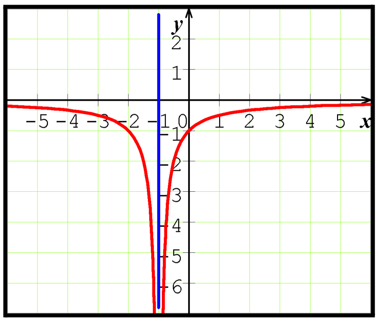
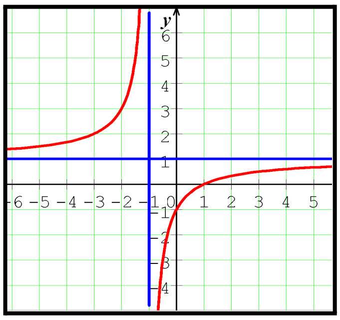
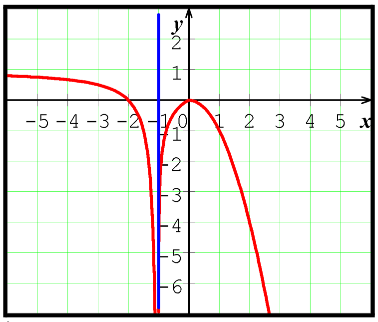
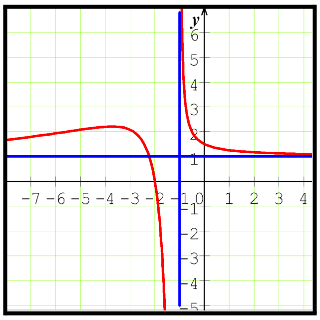
x	-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	‖	+	
$f(x)$	-1	↗		$+\infty$	‖ $-\infty$	↗	2

التمرين13: f ، g ، h ، k دوال معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. نعلم أن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} k(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-1} h(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

أنسب لكل دالة منحنيها البياني

IV. الدوال كثيرات الحدود المقاربة

التمرين14: ادرس تغيرات الدالة f ثم مثلها بيانياً في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;I,J)$

1) $f(x)=3x^2-6x+3$ 2) $f(x)=x^2-5x+6$ 3) $f(x)=-x^2+2x+3$ 4) $f(x)=2(x-1)(3-x)$

التمرين15: ادرس تغيرات الدالة f ثم أثبت أن النقطة I مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f و ارسم (C_f)

1) $f(x)=x^3-x+1$ و $I(0;1)$ 2) $f(x)=x^3-12x+3$ و 3 $(I(0;3))$ $f(x)=x^3-3x^2+3$ و $I(1;1)$

V. دراسة الدوال الناطقة

التمرين16: ادرس اتجاه تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ 2) $f(x)=\frac{x+2}{x^2}$ 3) $f(x)=\frac{3x+2}{x-2}$ 4) $f(x)=1-\frac{2}{x}$ 5) $f(x)=\frac{2x+10}{x-5}$ 6) $f(x)=\frac{3}{x-2}$

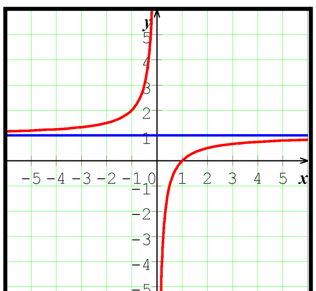
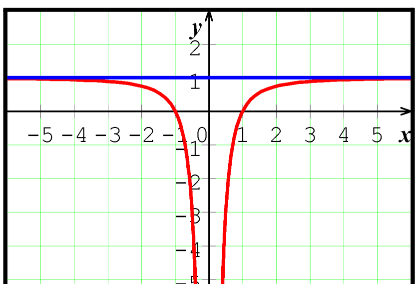
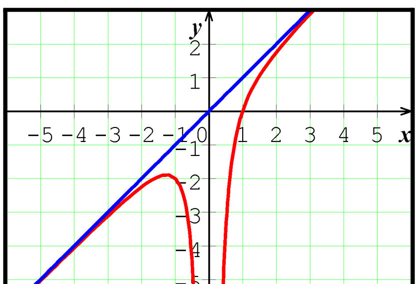
التمرين17: ادرس تغيرات الدالة f و بين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لمنحنى الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

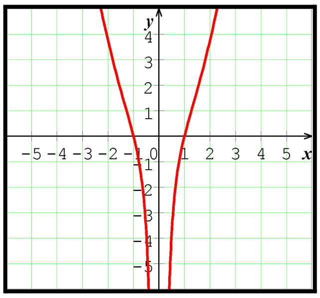
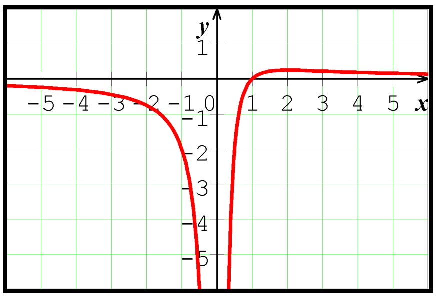
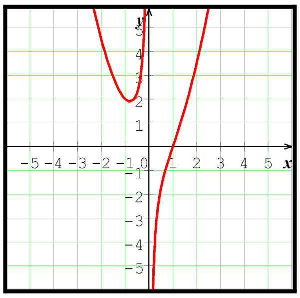
1) $f(x)=\frac{x^2+5x-1}{x}$; $(\Delta): y=x+5$ 2) $f(x)=x-1+\frac{2}{x}$; $(\Delta): y=x-1$

3) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$; $(\Delta): y=x+1$ 4) $f(x)=x+1+\frac{x}{x-2}$; $(\Delta): y=x+2$

التمرين18: أنسب لكل دالة منحنيها البياني من بين المنحنيات التالية:

$f(x)=1-\frac{1}{x}$ ، $g(x)=1-\frac{1}{x^2}$ ، $h(x)=\frac{x^2-1}{x}$ ، $k(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $l(x)=\frac{x-1}{x^2}$ ، $m(x)=\frac{x^3-1}{x}$

التمرين19: احسب نهاية f عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

(1 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{3x^2-x}$; $x_0=0$ (2 $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x+2}$; $x_0=2$ (3 $f(x)=\dfrac{(x-1)(2x-3)}{x^2-1}$; $x_0=1$

(4 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $x_0=1$ (5 $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $x_0=4$ (6 $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}$; $x_0=1$

(7 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{(x^2-9)^2}$; $x_0=3$ (8 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; $x_0=1$ (9 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$; $x_0=2$

(10 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x^2-x}$; $x_0=0$ (11 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x^2-x}$; $x_0=1$

التمرين20: احسب نهاية f عندما يؤول x إلى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

(1 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$ (2 $f(x)=-2x+3+\dfrac{x}{x^2-1}$ (3 $f(x)=\sqrt{x^2+3}+x$ (4 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(5 $f(x)=\sqrt{4x^2-3x-1}-2x$ (6 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{x-1}$ (7 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}$ (8

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1-2x^2}{x+2}$

التمرين21: عين النهايات التالية:

أ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5}{x+1}$ ؛ ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+1}$ ؛ جـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^2+(x+1)(x^2-2)\right]$ ؛ د- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+5\sqrt{1-x}\right)$

التمرين22: عين النهايات التالية: أ- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2-x}{x^2-1}$ ؛ ب- $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2-x}{x^2-1}$ ؛ جـ $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-1}{2-x}$ ؛ د- $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-1}{2-x}$.

التمرين23: عين النهايات التالية: أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}$ ؛ ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-3x}\right)$ ؛ جـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

التمرين24: عين النهاية عند x_0 للدالة f :

1- $f(x)=\dfrac{x^6-1}{x^2-2}$; $x_0=0$ 2- $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2}$; $x_0=1$ 3- $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; $x_0=-1$ 4- $f(x)=\sqrt{\dfrac{4+x}{1-x}}$; $x_0=0$

5- $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$; $x_0=1$ 6- $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$; $x_0=-2$ 7- $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}-\dfrac{1}{\sqrt{-5x-10}}$; $x_0=-2$

8- $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$; $x_0=0$ 9- $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; $x_0=4$ 10- $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; $x_0=4$

-11 $f(x)=\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$ $x_0=9$ 12- $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$ $x_0=1$ 15- $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1}$ $x_0=1$

التمرين25: عين النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، إن أمكن، للدالة f :

-1 $f(x)=x^3-2x$ -2 $f(x)=\frac{4x^2-7x}{x-5}$ -3 $f(x)=\sqrt{(x+2)^3}-\sqrt{x^3}$ -4 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

-5 $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ -6 $f(x)=\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}$ -7 $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{4x^2}$ -8 $f(x)=\frac{2x-\sqrt{x}}{x-1}$

-9 $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$ -10 $f(x)=\frac{x^2+4}{x^3-5x+1}$

VI. تمارين للتعمق

التمرين26: f دالة معرفة على D_f ، أحسب النهايات عند أطراف D_f.

-1 $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ ؛ $D_f=R-\{3\}$ -2 $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-2}$ ؛ $D_f=R-\{2\}$

-3 $f(x)=\frac{3x^2-6x}{x^2+x-2}$ ؛ $D_f=R-\{1;-2\}$ -4 $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$ ؛ $D_f=R-\{0\}$

-5 $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}$ ؛ $D_f=R-\{3\}$ -6 $f(x)=\frac{x}{x^2-3x-4}$ ؛ $D_f=R-\{-1;4\}$

-7 $f(x)=\frac{3x^2-6x}{x^2-7x+10}$ ؛ $D_f=R-\{5;2\}$ -8 $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+2}$ ؛ $D_f=R$

-9 $f(x)=\frac{3x^2-6x-1}{x^2+x}$ ؛ $D_f=R-\{-1;0\}$

التمرين27: عين النهايات التالية:

-1 $1\ \lim\frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1}$ -2 $-1\ \lim\frac{2x^2+x-1}{4x^2+5x+1}$ -3 $-1\ \lim\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+4x^2+2x-1}$

-4 $2\ \lim\frac{x^3+4x^2-8x-8}{x^3-2x^2+3x-6}$ -5 $-2\ \lim\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^3+8}$ -6 $1\ \lim\frac{2x^3+x^2+x-4}{x^3+2x^2+x-4}$

التمرين28: عين النهايات التالية:

-1 $0\ \lim\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ -2 $1\ \lim\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ -3 $3\ \lim\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ -4 $1\ \lim\frac{\sqrt{2x+2}+4x-6}{x^2-1}$ -5

-6 $1\ \lim\frac{x-1}{x+1-\sqrt{3x+1}}$ -7 $2\ \lim\frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{3x^2-7x+2}$ -8 $3\ \lim\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$ -9 $2\ \lim\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ $1\ \lim\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$

- 10 $-2\ \lim\frac{\sqrt{3x+8}-\sqrt{-3x-4}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{1-x}}$ 11- $3\ \lim\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$ 12- $0\ \lim\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}$

التمرين29: عين النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، إن أمكن، للدالة f :

-1 $f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}+2x+1$ -2 $f(x)=\sqrt{4x^2+2x}+2x$

-3 $f(x)=\sqrt{4x^2+5x-1}+x-3$ -4 $f(x)=\sqrt{9x^2+3x-1}+3x-1$

-5 $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-2x-3$ -6 $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x-1$

-7 $f(x)=\sqrt{9x^2+3x-1}+3x-1$ -8 $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}$

التمرين30: ادرس تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية و ارسم (C_f)

(1 $f(x)=x^3+x-1$ (2 $f(x)=2x^4-x^2-3$ (3 $f(x)=x^4-8x^3+16x^2-9$ (4 $f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2-1$

التمرين31: ادرس تغيرات الدوال التالية و مثلها بيانيا

(1 $f(x)=\frac{6x-1}{3-2x}$ (2 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ (3 $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6}$ (4 $f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2-x+1}$

5) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2}$ 6) $f(x)=x-1-\dfrac{3}{x}$ 7) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x}$

التمرين32: لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

.1 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا: $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$

.2 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D : $0\le f(x)\le\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

.3 استنتج نهاية f عندما يؤول x إلى $+\infty$

التمرين33: لتكن f دالة معرفة على $D=]0;+\infty[$ حيث: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

.1 أملئ الجدول التالي:

.2 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا: $x^2\le x^2+x+1\le(x+1)^2$ و $x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$

.3 استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا: $1-\dfrac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

.4 احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

التمرين34: f دالة معرفة على $D=]0;+\infty[$ حيث $f(x)=\dfrac{3+\sin x}{x}$

.1 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا: $\dfrac{2}{x}\le f(x)\le\dfrac{4}{x}$ (تذكير $-1\le\sin x\le 1$)

.2 استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

التمرين35: f دالة معرفة على $D=]0;+\infty[$ حيث $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x}$

.1 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D يكون: $\dfrac{x^2-1}{x}\le f(x)\le\dfrac{x^2+1}{x}$

.2 استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

التمرين36: بحصر الدالة f بدالتين بسيطتين احسب نهايات f عندما يؤول x إلى $-\infty$ و عندما يؤول x إلى $+\infty$

1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+3}$ 3) $f(x)=\cos x-x$ 4) $f(x)=\dfrac{5+\cos x}{x}$

VII. المستقيمات المقاربة

التمرين37: f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\dfrac{2}{x-1}$

.1 أثبت ان المستقيم **(D)** الذي معادلته $y=3$ مستقيم مقارب للمنحنى **(C)** الممثل للدالة f

.2 ادرس وضعية **(C)** بالنسبة للمستقيم **(D)**

التمرين38: f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{2x-1}{2-x}$

.1 أثبت أنه يوجد عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد x من D يكون: $f(x)=a+\dfrac{b}{2-x}$

.2 استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2$ مقارب لـ (C) منحنى الدالة f .

.3 ادرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ)

التمرين39: f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x+1}$

.1 أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f .

.2 ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

التمرين40: f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x-3}$

.1 أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D يكون: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

.2 استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x+6$ مقارب مائل للمنحني (C) الممثل للدالة f .

VIII. تقاطع المنحنيات

التمرين41: f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ و $g(x)=x-2-\dfrac{4}{(x+2)^2}$

.1 (C_f) و (C_g) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أثبت أن (C_f) و (C_g) لهما نفس المستقيمين المقاربين (المائل و العمودي).

.2 عين نقط تقاطع (C_f) و (C_g) .

التمرين42: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x^2-5x+4$.

(C) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

.1 ادرس تغيرات الدالة f .

.2 أثبت أن النقطة $S(1;-3)$ مركز تناظر للمنحني (C) .

.3 ارسم (C) .

.4 g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=-1+\dfrac{5}{x+1}$ ليكن (H) المنحني البياني للدالة g في المعلم السابق

-1 ادرس تغيرات الدالة g .

-2 ارسم (H) .

.5 تحقق (C) و (H) يشملان النقطة $A(0;4)$ ، ثم ادرس تقاطع (C) و (H) .

.6 أثبت أن نقطتين من نقط تقاطع (C) و (H) متناظرتين بالنسبة للنقطة S .

.7 برهن أن (C) و (H) لهما مماس مشترك في النقطة A .

التمرين43: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=x^3+3x$ و g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ حيث: $g(x)=5x-\dfrac{1}{x}$

نسمي (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

.1 ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (C_f)

.2 ادرس تغيرات الدالة g .

.3 عين معادلة للمستقيم المقارب المائل للمنحني (C_g) . (d) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_g) و (d) . ارسم (C_g) في نفس المعلم

.4 أثبت أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطتين A و B يطلب تعيين إحداثييهما .

.5 برهن أن (C_f) و (C_g) يقبلان مماسان مشتركان في النقطتين A و B و أن هذين المماسين متوازيين.

IX. حل المعادلات و المتراجحات

التمرين44: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$-{0} كما يلي: $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أثبت أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=1-x$. - ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .
2. ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (Δ) و (C) .
3. m عدد حقيقي .ناقش بيانيا و حسب قيم العدد m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.
4. لما يقطع المستقيم الذي معادلته $y=m$ (C) في نقطتين متمايزتين M و N ، أحسب بدلالة m احداثيي النقطة I منتصف $[MN]$
5. A و B النقطتين من (C) اللتين يكون فيهما المماس موازيا لمحور الفواصل.أثبت أن النقط A ، B و I في استقامية.

التمرين45: f دالة معرفة على $D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أثبت أن f دالة زوجية.
2. ادرس تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$
3. استنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلة له.
4. (P) المنحنى الذي معادلته $y=x^2+2$. M نقطة من (C) فاصلتها x و N نقطة من (P) فاصلتها x .
   - 1- احسب المسافة MN بدلالة x .
   - 2- ما هي نهاية MN عندما يؤول x إلى $+\infty$ ؟ إلى $-\infty$ ؟
5. ادرس وضعية (C) و (P) .
6. ارسم (C) و (P) في نفس المعلم .

التمرين46: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$-{1} بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-1)^2}$ و (C) تمثيلها البياني

1. احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) .
2. بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$: $f(x)=x+a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$
3. بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً يطلب تعيين معادلة له.
4. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=x+1$. عين نقط تقاطع المنحنى (C) و المستقيم d .

التمرين47: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$-{2 - } كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}$

1. احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى 2- .
2. عين الأعداد a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي من D_f : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$
3. جد معادلة لمستقيم مقارب مائل Δ للمنحنى (C) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.
4. تحقق أن Δ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.
5. حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

التمرين48: لتكن الدالة f المعرفة على $D_f=\mathbb{R}$-{ 1 ; 1 - } كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x^2-1}$

.1 عين الأعداد a ، b ، c و d حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{x+1}$

.2 استنتج معللا جميع المستقيمات المقاربة للمنحني (C) الممثل للدالة f .

- عين وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

التمرين49: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$. (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

.1 عين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. - أعط تفسيراً هندسيا لهذه النتيجة.

.2 عين الأعداد a ، b ، c حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=a+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

.3 ليكن (D) الذي معادلته $y=2$. عين الوضعية النسبية للمنحني (C) والمستقيم (D) .

التمرين50: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{13}{12}$

.1 أحسب نهايتي الدالة f بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

.2 أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

.3 أثبت أن النقطة $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ مركز تناظر للرسم البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

.4 استنتج حلول المعادلة : $f(x)=0$

.5 مثل بيانيا الدالة f .

.6 ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

التمرين51: f دالة معرفة على $D_f=\mathbb{R}-\{1;-1\}$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^3+9}{x^2-1}$. (C_f) منحناها في المعلم المتعامد والمتجانس

.1 برهن أنه من أجل كل x من D_f لدينا : $f(x)=x+\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}$

.2 استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب .

.3 أحسب نهايتي f بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$. بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيينه

.4 أثبت أن f قابلة للاشتقاق على D_f ، وبين أن : $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x^2-1)^2}$ حيث $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الرابعة .

بين أن 3 جذر لـ $P(x)$ ثم حلل $P(x)$ إلى جداء. استنتج إشارة $f'(x)$ على D_f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

التمرين52: f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$. نعطي جدول تغيرات الدالة f :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{5}{2}$	↗	$+\infty$

نفرض أن $f(x)=ax+\dfrac{b}{x-c}$ ، a ، b و c أعداد حقيقية نريد تعيينها . نسمي (C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس .

.1 أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب . استنتج قيمة c .

.2 انطلاقا من عبارة $f(x)$ ، بين أن لدينا العلاقة $6a+b=5$.

3. انطلاقا من عبارة $f'(x)$ بين أن لدينا $4a-b=0$

4. استنتج عبارة $f(x)$ وبرهن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $x-2y=0$ مقارب للمنحني (C_f) .

5. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) .أرسم (C_f) ومستقيميه المقاربين .