L'entropie dans le système respiratoire :

Etude d'un écoulement dans un tuyau cylindrique :

A.1 Il y a invariance par rotation d'angle θ donc v ne dépend pas de θ

A.2 L'équation de conservation de la matière s'écrit :

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

On en déduit que pour un écoulement incompressible $div\left(\vec{v}\right) = 0$.

$div\left(\vec{v}\right)$ $\Rightarrow \partial v/\partial z = 0$; v ne dépend pas de z.

A.3. La vitesse est indépendante de la variable t.

A.4. En régime stationnaire pour un fluide incompressible $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.

Comme v ne dépendait que de r, $\vec{rot}\left(\vec{v}\right) = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r\right) \wedge v\vec{e}_z = -\left(\dfrac{\partial}{\partial r}v\right)\vec{e}_\theta$ et $\vec{rot}\left(\vec{v}\right) \wedge \vec{v} = -v\left(\dfrac{\partial}{\partial r}v\right)\vec{e}_r$ qui se simplifiait avec $\dfrac{1}{2}\vec{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) = v\left(\dfrac{\partial}{\partial r}v\right)\vec{e}_r$ ou si on transforme la relation, $\left(\vec{v}\cdot\vec{grad}\right)\vec{v} = \left(v_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)v_z = 0$. L'équation de Navier-Stokes s'écrit : $0 = -\vec{grad}P + \eta\Delta\vec{v}$ soit en projetant : $\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0$; $\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0$; $\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)$

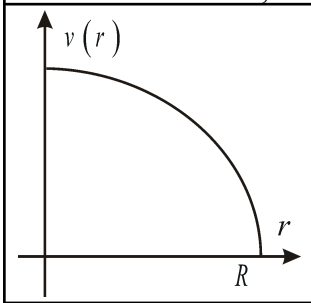
P ne dépend donc ni de r ni de θ, mais seulement de z.

A.5 Dans l'équation projetée sur Oz le premier membre ne dépend que de z, tandis que le second ne dépend que de r ; $\dfrac{dP}{dz}$ est une constante. Par intégration et compte tenu des conditions aux limites, $P(z) = P_0 + \dfrac{(P_L - P_0)z}{L}$

A.6 On obtient $\dfrac{(P_L - P_0)}{L} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)$. Par intégration, on calcule :

$v(r) = \dfrac{(P_L - P_0)}{4\eta L}r^2 + A\ln(r) + B$ Pour que v(0) soit finie, on doit avoir A = 0.

Sur la paroi de la conduite par continuité de la vitesse on doit avoir $v(R) = 0$; on en déduit $B = -\dfrac{(P_L - P_0)R^2}{4\eta L}$, d'où $v(z) = -\dfrac{1}{4\eta}\dfrac{P_0 - P_L}{L}\left(r^2 - R^2\right)$.



La vitesse maximale est obtenue quand $\dfrac{dv(z)}{dr} = 0 = -\dfrac{2}{4\eta}\dfrac{P_0 - P_L}{L}r$ soit en $r = 0$

$v_{\max} = \dfrac{1}{4\eta}\dfrac{P_0 - P_L}{L}R^2$

Tournez la page SVP

Ecoulement stationnaire:

A.7. Les forces qui s'exercent sur le cylindre sont :

- les forces pressantes : $\vec{F_1} = P_0 \pi r^2 \vec{e_z}$ et $\vec{F_2} = -P_L \pi r^2 \vec{e_z}$
- les forces de viscosité : $\vec{F_3} = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \vec{e_z}$

A.8. On applique le théorème d'Euler. En régime permanent $0 = P_0 \pi r^2 - P_L \pi r^2 + 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$

$\frac{dv}{dr} = \frac{-(P_0 - P_L)}{2L\eta} r$ d'où $v(r) = \frac{(P_L - P_0)}{4\eta L} r^2 + B$. Comme précédemment, Sur la paroi de la conduite par continuité de la vitesse on doit avoir $v(R) = 0$; on en déduit

$B = -\frac{(P_L - P_0) R^2}{4\eta L}$, d'où $v(z) = -\frac{1}{4\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} \left(r^2 - R^2\right)$.

Résistance hydraulique:

A.9 Le débit volumique est $Q = \iint_{section} \vec{v}.d\vec{s} = \int_o^R -\frac{1}{4\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} \left(r^2 - R^2\right) 2\pi r dr$

$$Q = -\frac{\pi}{2\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} \int_o^R \left(r^2 - R^2\right) r dr = -\frac{\pi}{2\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} \left[\frac{r^4}{4} - R^2 \frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} \left[\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} = K\left(P_0 - P_L\right) \quad \text{avec} \quad K = \frac{\pi R^4}{8\eta L}$$

La vitesse moyenne est : $v_{moy} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{8\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} R^2 = \frac{1}{2} v_{\max}$

A.10 La résistance hydraulique est $R_H = \frac{1}{K} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$ c'est l'équivalent U=RI avec I ⇔Q et U⇔ ΔT

A.11. La résistance varie en R^4 alors que la résistance électrique $R_{th} = \frac{L}{\sigma \pi R^2}$ varie en R^2.
Cela vient du fait que la vitesse n'est pas uniforme sur la section.

A.12. Il faut que le nombre de Reynolds soit inférieur à 2000 soit $R_e = \frac{R \mu v_{moy}}{\eta} < 2000$

$R < \frac{2000\eta}{\mu v_{moy}} = 2cm$

Association de résistances hydrauliques :

A.13 a) Les résistances s'ajoutent : $R_{hy} = R_{hy_1} + R_{hy_2}$

C'est l'équivalent de l'association série de résistance.

b) On a un diviseur de « tension » : $P_1 = P_2 + \frac{R_{hy_2}}{R_{hy_1} + R_{hy_2}}\left(P_0 - P_2\right)$

A.14 Ce sont les inverses qui s'ajoutent : $\frac{1}{R_{hy}} = \frac{1}{R_{hy_1}} + \frac{1}{R_{hy_2}}$. En électricité, les conductances s'ajoutent en parallèle.

On a un diviseur de « courant », $Q_1 = \frac{R_{hy_2}}{R_{hy_1} + R_{hy_2}} Q$

A.15 La puissance électrique est $P = RI^2$. Par analogie, la puissance hydraulique est $P = R_H Q^2$.

L'arbre bronchique et l'entropie :

A.16. Le nombre de bronchioles est $N(p) = 2^{p-1}$

A.17. $r_p = r_1 h^{p-1}$, $l_p = l_1 h^{p-1}$

A.18. $V_2 = V_1 h^3 \quad V_3 = V_1\left(h^3\right)^2$. Plus généralement, $V_p = V_1\left(h^3\right)^{p-1}$

Le volume d'une génération p est donc $V_{tp} = V_1 2^{p-1}\left(h^3\right)^{p-1} = V_1 X^{p-1}$

Le volume total est : $V_t = \sum_{p=1}^{n} V_1 X^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} V_1 X^p = V_1 \frac{1-X^n}{1-X}$

A.19 Comme $R_H = \frac{1}{K} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$, $R_2 = \frac{8\eta Lh}{\pi R^4 h^4} = \frac{R_1}{h^3}$. Plus généralement $R_p = \frac{R_1}{\left(h^3\right)^{p-1}}$.

Les résistances étant montées en parallèle, $R_p = \frac{R_1}{2^{p-1}\left(h^3\right)^{p-1}} = \frac{R_1}{X^{p-1}}$

La résistance totale est $R_t = \sum_{p=1}^{n} V_1\left(\frac{1}{X}\right)^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} R_1\left(\frac{1}{X}\right)^p = R_1 \frac{1-1/X^n}{1-1/X}$

A.20 Le volume diverge si X>1 soit $h > h_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0.79$

Inversement, pour la résistance, 1/X<1 alors $h < h_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0.79$

A.21 $P_{th} = R_{Hy} Q_1^2 = R_1 \frac{1-1/X^n}{1-1/X} Q_1^2$

$dS \underset{\substack{2nd \\ \text{Principe}}}{=} \delta S^e + \delta S^c = \frac{\delta Q_{ech}}{T_{th}} + \sigma dt = \frac{-P_{th} dt}{T} + \sigma dt \underset{\substack{Régime \\ Permanent}}{=} 0$.

D'où $\sigma = \frac{-P_{th}}{T} = \frac{R_1}{T} \frac{1-1/X^n}{1-1/X} Q_1^2 > 0$

A.23 $\sigma_v = \frac{\sigma}{V} = -\frac{p_{Th}}{TV} = \frac{R_1}{T} \frac{1-1/X^n}{1-1/X} \frac{Q_1^2}{V_1} \frac{1-X}{1-X^n} = \frac{R_1}{T} \frac{Q_1^2}{V_1} X^{1-n}$

Tournez la page SVP

$h < h_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0.79$ L'entropie volumique diverge si X<1 soit Dans le cas de l'homme, il n'y a pas de divergence.		

CORRIGE DU PROBLEME B :

EFFETS DE PEAU DANS DIFFERENTS DOMAINES

PRÉLIMINAIRES

B.1

- Viscosité : $\eta S\frac{dv}{dx}$ est une force donc η est en $\mathrm{N\cdot m^{-2}\cdot s}$ (soit $\mathrm{Pa\cdot s}$)
- Masse volumique : masse divisée par volume donc ρ est en $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$
- Conductivité thermique : $\vec{j}=-\lambda\overrightarrow{gradT}$ est en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ donc λ est en $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$
- Capacité thermique massique : $dH=mcdT$ donc c est en $\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$

B.2 A partir de la question précédente, on remarque que $\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)\omega}}$ et $\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\omega}}$ sont homogènes à des longueurs.

B.3 Loi d'Ohm locale : $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ et équation de Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, d'où $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\sigma\vec{E}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, donc $\sigma\cdot\mu_0$ est en $\mathrm{m^{-2}\cdot s}$.

Une longueur possible est $\delta=\sqrt{\frac{1}{\mu_0\sigma\omega}}$

B.4 Soit l'équation différentielle suivante $\frac{d^2y}{dx^2}-2i\alpha^2y(x)=0$

L'équation caractéristique est $r^2-2i\alpha^2=0$ dont les racines sont $r_1=\sqrt{2}\alpha\sqrt{i}$ et $r_2=-\sqrt{2}\alpha\sqrt{i}$. Or on sait que $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, donc $r_1=\alpha(1+i)$ et $r_2=-\alpha(1+i)$.

La solution générale est donc : $y(x)=Ae^{(1+i)\alpha\cdot x}+Be^{-(1+i)\alpha\cdot x}$.

EFFET DE PEAU EN ÉLECTROMAGNÉTISME

B.5 $E=\frac{U}{L}=\frac{J}{\sigma_0}$ donc $J=\frac{\sigma_0}{L}U$

B.6 $I=\iint\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}=J\cdot\pi R^2=\frac{\sigma_0}{L}\pi R^2U\Rightarrow U=\frac{L}{\sigma_0}\frac{1}{\pi R^2}I=R_{élec}I$ soit $R_{élec}=\frac{1}{\pi R^2}\frac{L}{\sigma_0}$.

La résistance linéique est donc $R_{lin}=\frac{1}{\pi R^2}\frac{1}{\sigma_0}=\frac{1}{S}\frac{1}{\sigma_0}$.

Tournez la page SVP

Application numérique : $R_{lin} = 6{,}5\ \mathrm{m\Omega \cdot m^{-1}}$.

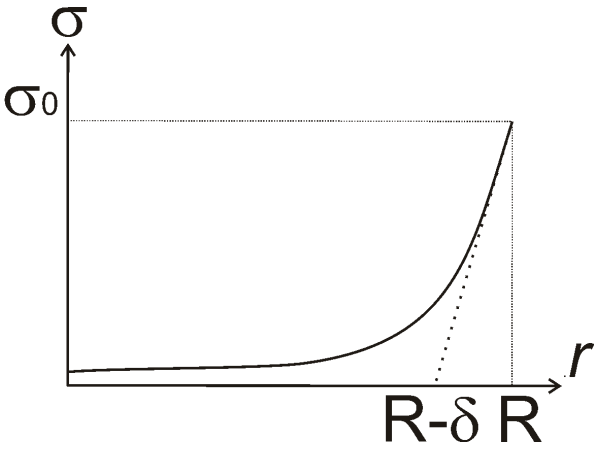
B.7 Maxwell- Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\underbrace{\vec{j}}_{=\sigma\vec{E}} + \underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{courant de déplacement}}\right)$. On a donc $\frac{\left\|\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\|}{\sigma_0\left\|\vec{E}\right\|} = \frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma_0} < 9\cdot10^{-7}$: le courant de déplacement est donc largement négligeable devant le courant de conduction.

B.8 On a $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\sigma_0}\vec{j}\right)$ et $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\sigma_0\vec{E}$. Sachant que $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot} = \overrightarrow{grad}div - \vec{\Delta}$ avec $div\vec{j} = 0$ car on est dans un métal, alors $\Delta\vec{j} = \underbrace{\mu_0\sigma_0}_{=\xi}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$.

B.9 $\Delta J_0(r) = \frac{d^2J_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_0(r)}{dr} = i\omega\mu_0\sigma J_0 = \frac{2i}{\delta^2}J_0$.

B.10 Application numérique : $\delta \approx 2\,\mu\mathrm{m}$ ce qui est très petit comparé au rayon du fil de cuivre (892 µm)

B.11



La tangente intercepte l'axe des abscisses en R-δ.

B.12 A une fréquence donnée il y a une valeur de l'effet de peau : ainsi le courant est conduit en surface. Si on multiplie le nombre de petits fils, on augmente la surface sur laquelle est conduit le courant, donc la résistance diminue (et donc l'effet Joule).
Le fait de déposer une mince pellicule d'argent (très bon conducteur) limite aussi l'effet Joule.

B.13 $dG = \sigma(r)\frac{2\pi r\,dr}{L}$

B.14 Les éléments de volume sont connectés en parallèle. On somme donc les conductances :

$$G = \int_0^R \frac{2\pi r}{L}\sigma_0\cdot e^{\frac{r-R}{\delta}}dr = \frac{2\pi\sigma_0}{L}\left(\delta R - \delta^2 + \delta^2 e^{-R/\delta}\right)$$

EFFET DE PEAU EN THERMODYNAMIQUE

B.15 Bilan d'enthalpie sur une petite tranche *dz :*

enthalpie à $t+dt$ - enthalpie à t = $dH = \rho S dz dT =$ $\delta Q_P = \left(j_{Th}(z)S - j_{Th}(z+dz)S\right)dt$,

D'où : $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_{Th}}{\partial z}$. Or la loi de Fourier conduit à $j_{Th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}$, soit $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\dfrac{\lambda}{\rho c}}_{=a} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

B.16 La quantité a est en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

B.17 Le théorème de Fourier nous apprend que tout signal périodique se décompose en une somme infinie de fonctions sinusoïdales et si le système est linéaire, alors grâce au théorème de superposition, on peut se limiter aux variations sinusoïdales.

B.18 $a \dfrac{d^2 \underline{f(z)}}{dz^2} = i\omega \underline{f(z)}$

B.19 $\dfrac{d^2 \underline{f(z)}}{dz^2} = \dfrac{i\omega}{a} \underline{f(z)} = \left(\dfrac{1+i}{\delta}\right)^2 \underline{f(z)}$: la solution est du type $\underline{f(z)} = A_1 \cdot e^{(1+i)\frac{z}{\delta}} + A_2 e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}}$.

Or, quand *z* augmente (axe vers le bas), il faut que la température ne diverge pas, donc $A_1 = 0$.

B.20 Pour des variations journalières $\left(\omega = \dfrac{2\pi}{86164}\right)$, on a $\delta = 7{,}4\,\mathrm{cm}$.

Pour des variations annuelles $\left(\omega = \dfrac{2\pi}{86164 \times 365}\right)$, on a $\delta = 1{,}4\,\mathrm{m}$

B.21 Au-delà de quelques δ, les variations de température dans le sol ne se font plus sentir : la canalisation est hors gel à plus de 1 m de profondeur !

EFFET DE PEAU EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

B.22 Le champ de vitesse dépend du temps et de la cote *z*.

B.23 En développant le terme convectif $\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{\vec{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\vec{v} = v\underbrace{\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right)}_{=0}$, on se rend compte qu'il vaut zéro.

L'équation de Navier-Stokes conduit alors à :

$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$: la pression est donc constant à la profondeur *z*.

Tournez la page SVP

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{\frac{\eta}{\rho}}_{=\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

On a aussi : .

B.24 $$i\omega \underline{f(z)} = \nu \frac{d^2 \underline{f(z)}}{dz^2} \Rightarrow \frac{d^2 \underline{f(z)}}{dz^2} - \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 \underline{f(z)} = 0$$.

Solution du type : $$\underline{f(z)} = \underbrace{A_1 \cdot e^{(1+i)\frac{z}{\delta}}}_{diverge} + A_2 e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}}$$.

Or en $z = 0$, la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la plaque, donc $A_2 = v_0$.

D'où $$\overrightarrow{v(z,t)} = v_0 \underbrace{e^{-z/\delta}}_{atténuation} \underbrace{\cos(\omega t - z/\delta)}_{propagation} \hat{e}_x$$

B.25 Application numérique : $\delta = 13$ mm

B.26 Application numérique : $\delta = 5{,}6$ cm (à 1 Hz) $\delta = 1{,}8$ cm (à 10 Hz). Les ondes sismiques de cisaillement ne se propagent pas.

FIN DU CORRIGE