

Fiche technique

Professeur : Mouad Zillou

Matière : Mathématiques

	Durée : 10 heures	Niveau : TCSF
Les capacités attendues	- Utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer une valeur approchée d'un angle défini par l'un de ses lignes trigonométriques et inversement. - Maitriser les lignes trigonométriques des angles usuels et appliquer les différentes relations.	
Contenus du programme	- Cercle trigonométrique, les abscisses curvilignes d'un point, l'abscisse curviligne principale ; - Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine, la mesure principale, relation de Chasles ; - Relation entre le degré, le radian et le grade ; - Angle orienté de deux vecteurs et mesure de cet angle ; - Lignes trigonométriques d'un nombre réel et lignes trigonométriques d'un angle de deux vecteurs ; - Relations : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$; $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ - Lignes trigonométriques d'un angle de mesure : 0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ - Relations entre les lignes trigonométriques de deux angles dont la somme ou la différence des mesures est égale à : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π modulo 2π.	
Recommandations pédagogique	On définira tout point du cercle trigonométrique par son abscisse curviligne principale ou par ses coordonnées par rapport à un repère orthonormé lié au cercle trigonométrique.	
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques. Distribution périodique du programme de mathématiques	
Rôle de l'enseignant	Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations	

Rôle de l'apprenant

Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions et formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème/propriété et répondre aux exercices

Etapes	Contenu du cours et activités	Durée													
Résumer du cours	<u>I. Cercle trigonométrique – Abscisse curvilligne</u> <u>Dans tout le chapitre, le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$</u> <u>1. Cercle trigonométrique</u> <u>a- Définition</u> On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens antihoraire (aussi appelé sens direct ou sens positif). Le point I : S'appelle l'origine de (C) Le triplet $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ s'appelle repère orthonormé direct lié au (C). $\oplus$: signifie le sens direct ou sens antihoraire	30 min													
	<u>b- Unités de mesure des angles</u> <u>Activité</u> Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I. 1) Soit M un point de (C), et α la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en degré, remplir le tableau suivant : <table><tr><td>Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré</td><td>360</td><td>180</td><td>90</td><td>60</td><td>45</td><td>30</td></tr><tr><td>Longueur de l'arc $\widehat{IM}$</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table> 2) Montrer que si l est la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ alors $l = \alpha \frac{\pi}{180}$		Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	360	180	90	60	45	30	Longueur de l'arc $\widehat{IM}$	...	...	...	...	...
Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	360	180	90	60	45	30									
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$	...	...	...	...	...	...									

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie, compas , rapporteur ...

Résumer du cours	Définition Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit M un point de (C) *La longueur de l'arc $\widehat{IM}$ intercepté par l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ est la mesure de $\widehat{IOM}$ en radian et se note rad ou rd telle que la mesure d'un angle plat en radian est égale à πrd. *Il existe une autre unité de mesure des angles s'appelle le grade et se note gr telle que la mesure d'un angle plat en grade est égale à 200gr. Remarque Par l'utilisation de la proportionnalité : Si α, β et γ sont respectivement des mesures d'un angle en degré, en radian et en grade respectivement alors : $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\gamma}{200}$																			
Evaluation	1) Compléter le tableau suivant : <table><tr><td>Mesure de l'angle en degré</td><td>60°</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>150°</td></tr><tr><td>Mesure de l'angle en radian</td><td>...</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>...</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>...</td></tr><tr><td>Mesure de l'angle en grade</td><td>...</td><td>...</td><td>50</td><td>...</td><td>...</td></tr></table> 2) Déterminer, en radian, les mesures des angles d'un triangle équilatérale. 3) Déterminer, en radian, les mesures des angles d'un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{A} = 120^\circ$	Mesure de l'angle en degré	60°	...	...	...	150°	Mesure de l'angle en radian	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{6}$	...	Mesure de l'angle en grade	...	...	50	...	...	30 min
Mesure de l'angle en degré	60°	...	...	...	150°															
Mesure de l'angle en radian	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{6}$	...															
Mesure de l'angle en grade	...	...	50	...	...															
	NB : Dans la suite, en utilisant le radian comme unité de mesure des angles sans écrire rd ou rad																			

2. Abscisse curviligne – Abscisse curviligne principale

Définition

Soit (C) un cercle trigonométrique.

Tout point M de (C) s'associe par à un nombre réel de forme $\alpha + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}$ s'appelle abscisse curviligne du point M et on écrit $M(\alpha + 2k\pi)$.

Remarques :

- ⊙ Tout point M de (C) admet une infinité d'abscisses curvilignes.
- ⊙ Tout point M de (C) admet une abscisse curviligne appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ et s'appelle **abscisse curviligne principale** du point M .

Techniques

Pour déterminer α_0 ($\alpha_0 \in]-\pi, \pi]$) l'abscisse curviligne principale d'un point :

- Si α est l'abscisse curviligne d'un point, alors il faut l'écrire sous forme $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}$
- Si $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}$ alors $\alpha_0 = \alpha - 2k\pi$; la méthode c'est de déterminer la valeur de k

Exemple

Méthode 01

Déterminer l'abscisse curviligne principale du point $A\left(\frac{25\pi}{4}\right)$

$$\text{On a } \frac{25\pi}{4} = \frac{24\pi + \pi}{4} = 6\pi + \frac{\pi}{4}$$

Donc l'abscisse curviligne principale du point A est $\frac{\pi}{4}$

Méthode 02

$$\text{On a } \frac{25\pi}{4} = \alpha_0 + 2k\pi / k \in \mathbf{Z} \quad \text{donc} \quad \alpha_0 = \frac{25\pi}{4} - 2k\pi$$

$$\text{Or } \alpha_0 \in]-\pi, \pi] \quad \text{donc} \quad -\pi < \frac{25\pi}{4} - 2k\pi \leq \pi \quad \text{Alors} \quad -1 - \frac{25}{4} < -2k \leq 1 - \frac{25}{4}$$

$$\text{Par conséquent} \quad \frac{21}{8} \leq k < \frac{29}{8} \quad \text{c-à-d} \quad 2,625 \leq k < 3,625$$

$$\text{Puisque } k \in \mathbf{Z} \quad \text{alors } k = 3 \quad \text{D'où} \quad \alpha_0 = \frac{25\pi}{4} - 2 \times 3\pi = \frac{25\pi - 24\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

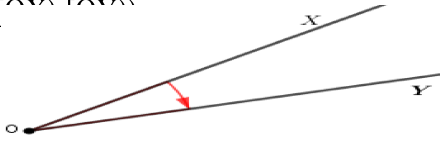
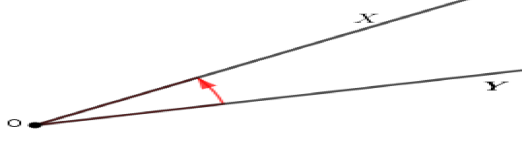
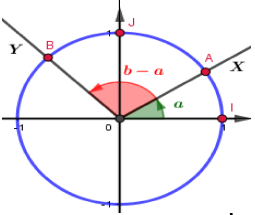
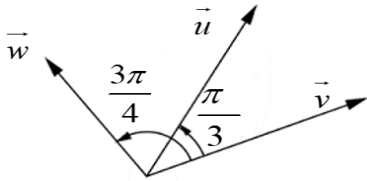
Donc l'abscisse curviligne principale du point A est $\frac{\pi}{4}$

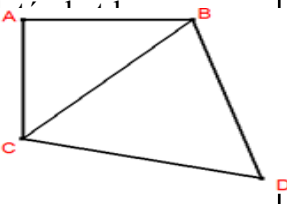
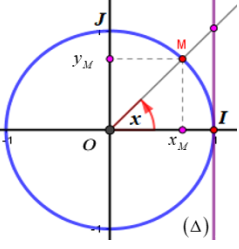
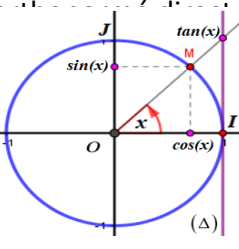
Résumer
du cours

120 min

Evaluation

Déterminer les abscisses curvilignes principales des points suivants :

	$A\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; $B\left(\frac{67\pi}{4}\right)$; $C\left(\frac{267\pi}{6}\right)$; $D\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$	
<u>Résumer du cours</u>	<u>II. Angles orientés</u> 1. Les angles orientés par deux demi droites : Dans le plan orienté, on considère deux demis droites $[OX)$ et $[OY)$ l'angle déterminé par le couple $([OX), [OY))$ s'appelle l'angle orienté de deux demi droite on le note : $([OX), [OY))$   2. Mesures d'un angle orienté par deux demi droites : Soit $[OX)$ et $[OY)$ deux demi droites d'origine O et soit (C) le cercle trigonométrique de centre O. Soient $A(a)$ et $B(b)$ les points d'intersections de (C) avec $[OX)$ et $[OY)$ respectivement.  Définitions : On appelle mesure de l'angle orienté $(OX; OY)$ tout réel qui s'écrit sous la forme : $(b-a) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et on le note : $(\overline{OX}; \overline{OY}) \equiv (b-a) + 2k\pi$ Se lit : la mesure de l'angle $(\overline{OX}; \overline{OY})$ est congru à $(b-a)$ modulo 2π. Remarque Parmi toutes les mesures de $(\overline{OX}; \overline{OY})$, une seule dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ c'est la mesure principale. Propriété (Relation de Chasles) Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté on a : $(\overline{u}, \overline{w}) + (\overline{w}, \overline{v}) \equiv (\overline{u}, \overline{v}) [2\pi]$	60 min
<u>Evaluation</u>	Déterminer une mesure de l'angle $(\overline{u}, \overline{w})$. 	10 min
<u>Résumer du cours</u>	Propriété Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté on a : $\mathbb{Z} (\overline{u}, \overline{u}) \equiv 0 [2\pi] \quad ; \quad \mathbb{Z} (\overline{u}, \overline{-u}) \equiv \pi [2\pi]$ $\mathbb{Z} (\overline{v}, \overline{u}) \equiv -(\overline{u}, \overline{v}) [2\pi] \quad ; \quad \mathbb{Z} (\overline{-u}, \overline{-v}) \equiv (\overline{u}, \overline{v}) [2\pi]$ $\mathbb{Z} (\overline{u}, \overline{-v}) \equiv (\overline{u}, \overline{v}) + \pi [2\pi] \quad ; \quad \mathbb{Z} (\overline{-u}, \overline{v}) \equiv (\overline{u}, \overline{v}) + \pi [2\pi]$ Conséquence Soient k et k' deux nombres non nuls.	30 min

	- Si k et k' ont même signe alors $(ku, k'v) \equiv (u, v)[2\pi]$ - Si k et k' ont des signes contraires alors $(ku, k'v) \equiv (u, v) + \pi[2\pi]$	
Evaluation	On considère la figure ci-contre telle que le triangle DBC est équilatéral et le triangle ABC est isocèle en A. Déterminer les mesures suivantes : (CB, BD) ; (BA, BD) ; (BA, BC) ; (DC, DB). 	30 min
Résumer du cours	III. Les rapports trigonométriques d'un nombre réel 1. Introduction Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit J un point de (C) tel que $(OI, OJ) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit M un point de (C) d'abscisse curviligne x et soit (Δ) la droite passant en I et parallèle à (OJ). Voir la figure ci-dessous $\begin{cases} \cos(x) = \frac{x_M}{OM} = \frac{x_M}{1} = x_M \\ \sin(x) = \frac{y_M}{OM} = \frac{y_M}{1} = y_M \end{cases}$  on a M à pour coordonnées $M(\cos(x), \sin(x))$ Si M' d'abscisse curviligne $x + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ alors M' confondue avec M Avec le point M par conséquent : $\begin{cases} \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$ L'intersection de la droite (OM) et (Δ) détermine la tangente de nombre réel x 2. Définitions : Soit (C) un cercle trigonométrique Dans et (O, OI, OJ) un repère lié au (C) et soit M un point de (C). L'abscisse du point M s'appelle le cosinus de nombre réel x et se note $\cos(x)$ L'ordonnée du point M s'appelle le sinus de nombre réel x et se note $\sin(x)$ L'intersection de la droite (OM) et (Δ) détermine la tangente de nombre réel x et se note $\tan(x)$.  3. Propriétés :	90 min

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\otimes -1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \otimes -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

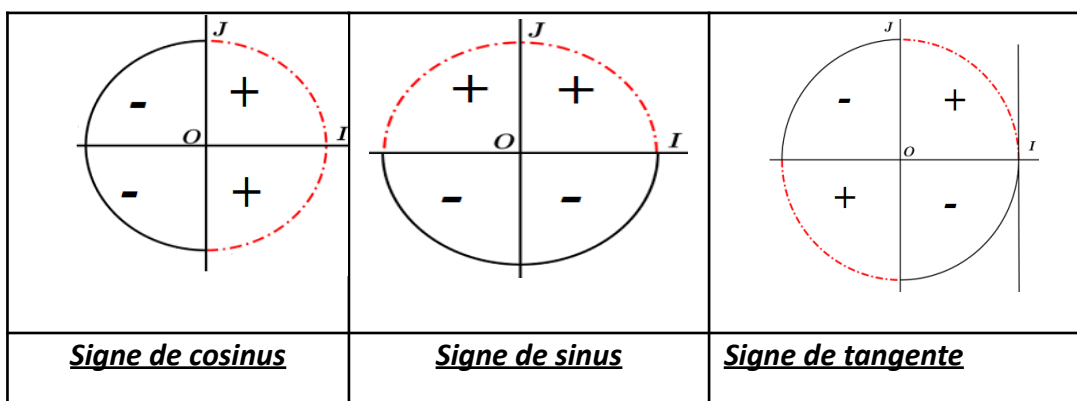
$$\otimes \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \otimes \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \quad \otimes \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\otimes \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\otimes 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\otimes \tan(x + k\pi) = \tan(x) / k \in \mathbb{Z}$$

4. Signe de cosinus, sinus et tangente sur $\mathbb{R}$



Evaluation
n

- 1) Soit $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$ tel que $\cos(x) = \frac{-4}{5}$; calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.
- 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1 - \cos^2(x) \sin^2(x)$

15 min

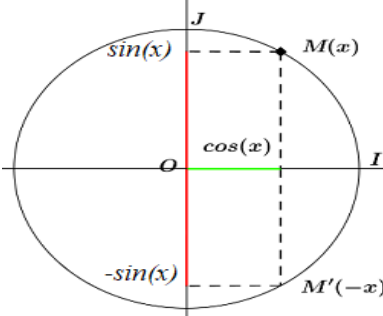
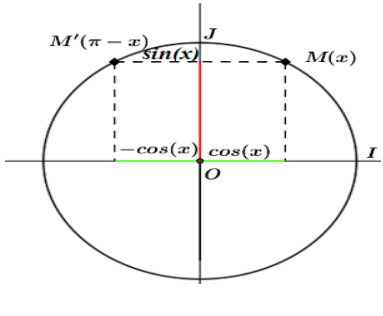
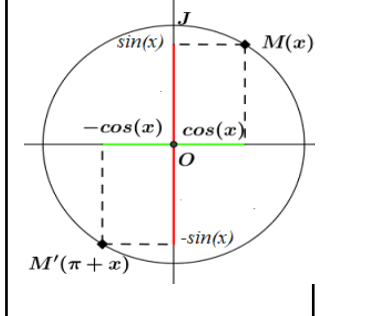
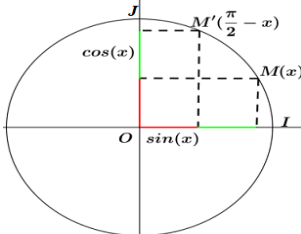
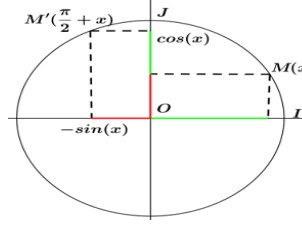
5. Relation entre les rapports trigonométriques

Soit (C) un cercle et M un point du cercle (C) d'abscisse curviligne x

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a les relations suivantes :

Résumer du
cours

90 min

				
	$\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \\ \tan(-x) = -\tan(x) \end{cases}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z} \right)$	$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \tan(\pi - x) = -\tan(x) \end{cases}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z} \right)$	$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \tan(\pi + x) = \tan(x) \end{cases}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z} \right)$	
				
	$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} \end{cases}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z} \right) ; \left(x \neq k\pi / k \in \mathbf{Z} \right)$	$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan(x)} \end{cases}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z} \right) ; \left(x \neq k\pi / k \in \mathbf{Z} \right)$		
Evaluation n	Simplifier les expressions suivantes : $A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(13\pi + x)$ $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(12\pi + x) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)$			15 min

Résumer du cours	<u>1. Rapports trigonométriques des angles usuels</u>						20 min
	x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
	$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
	$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
	$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0
Evaluation	Calculer : $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{-23\pi}{3}\right)$; $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$						