Chapitre 11
Chaînes de Markov

I. Suites de matrices

Définition 1

Soient $k \in N^{\times}$ et $n \in N$ tels que $U_n = \left(u_{i,n}\right)_{i \in [\![1,k]\!]} \in M_{k,1}(R)$. $\left(U_n\right)$ est une **suite de matrices colonnes** si chacun des coefficients $u_{i,n}$ des matrices U_n est le terme général d'une suite indicée par n.

Exemple 1

La suite $\left(U_n\right)$ définie par

$$\forall n \in N, U_n = \left(n^2\ 2n\ 1\right)$$

est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les suites $\left(u_{1,n}\right), \left(u_{2,n}\right), \left(u_{3,n}\right)$ définies pour tout $n \in N$ par

$$\{u_{1,n} = n^2\ u_{2,n} = 2n\ u_{3,n} = 1$$

La suite $\left(u_{3,n}\right)$ est ici constante.

Remarque

On peut généraliser les suites de matrices à tous les espaces de matrices $M_{k,r}(R)$ où $k, r \in N^{\times}$.

Définition 2

Soient $k \in N^{\times}$ et $n \in N$ tels que $U_n = \left(u_{i,n}\right)_{i \in [\![1,k]\!]} \in M_{k,1}(R)$. $\left(U_n\right)$ **converge** si chacune des suites $\left(u_{i,n}\right)_{n \in N}$ est une suite convergente. Si chacune des suites $\left(u_{i,n}\right)_{n \in N}$ converge vers l_i pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ alors $\left(U_n\right)$ converge vers la matrice colonne $U = \left(l_i\right)_{i \in [\![1,k]\!]}$

Exemples

- La suite $\left(U_n\right)$ définie à l'exemple 1 diverge car les suites $\left(u_{1,n}\right)_{n \in N}$ et $\left(u_{2,n}\right)_{n \in N}$ divergent.
- La suite $\left(U_n\right)$ définie par

  $$\forall n \in N, U_n = \left(e^{-n}\ 1\right)$$

  converge vers $U = (0\ 1)$

Propriété 1

Soient $k \in N^{\times}$ et $n \in N$. Soit $A \in M_k(R)$. Si $\left(U_n\right)$ est une suite de matrices colonnes de $M_{k,1}(R)$ telle que

$$\forall n \in N, U_{n+1} = AU_n$$

Alors

$$\forall n \in N, U_n = A^n U_0$$

Preuve

Par une récurrence triviale

Exemple 1

Soient les suites $\left(a_n\right)$ et $\left(b_n\right)$ définies par $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ et

$$\forall n \in N, \{a_{n+1} = a_n + 2b_n\ b_{n+1} = - a_n + 4b_n$$

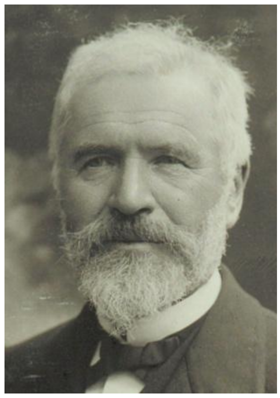
Posons alors, soit $n \in N$,

$$U_n = \left(a_n\ b_n\right)\ et\ A = (1\ 2\ \ -1\ 4)$$

Ainsi,

$$U_0 = \left(a_0\ b_0\right) = (1\ 2)\ et\ U_{n+1} = AU_n$$

Remarque



Dans le supérieur, on calculera A^n en écrivant A sous la forme $B(D+N)B^{-1}$ où D est une matrice diagonale et où N est une matrice nilpotente qui commute avec A (en application du théorème de Jordan, ce qui revient de fait à faire un changement de base).
Pour l'illustrer avec l'exemple précédent, la méthode consiste à calculer le polynôme caractéristique de A

$$\chi_A(X) = \left|XI_2 - A\right| = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)(X-4)+2 = X^2-5X+6$$

Ce polynôme possède deux racines distinctes et simples que l'on nomme des valeurs propres : 2 et 3. On verra dans le supérieur qu'il s'agit d'une condition suffisante pour affirmer que A est diagonalisable, c'est-à-dire que A s'écrit sous la forme d'une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans une base de vecteurs propres constituée de 2 vecteurs non nuls $X_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X_3\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que

$$AX_2 = 2X_2 \ (1) \ et \ AX_3 = 3X_3 \ (2)$$

Or,

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 2x \\ -x+4y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow 2y = x$$

Donc $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Par ailleurs,

$$(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+2y' = 3x' \\ -x'+4y' = 3y' \end{cases} \Leftrightarrow x' = y'$$

Donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.
On pose alors

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et donc, en remarquant que B est inversible car $|B| = 2\times1 - 1\times1 = 1 \neq 0$,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut vérifier que

$$A = BDB^{-1}$$

On en déduit que, par une récurrence évidente, soit $n\in N$,

$$A^n = \left(BDB^{-1}\right)^n = BD\underbrace{B^{-1}\times B}_{=I_2}DB^{-1}\times\ldots\times BDB^{-1} = BD^nB^{-1}$$

Ainsi,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 2\times3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2\times3^n - \ldots \end{pmatrix}$$

Et donc

$$U_n = A^nU_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 2\times3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2\times3^n - 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 3^{n+1} - 2^n \end{pmatrix}$$

Soit

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1} \ et \ b_n = 3^{n+1} - 2^n$$

Remarque

Dans le cours de mathématiques expertes, on demandera simplement de montrer par un raisonnement par récurrence que les formes explicites des suites a_n et b_n trouvées ci-dessus conviennent.

Propriété 2

Soient $k\in N^{\times}$ et $n\in N$. Soient $A\in M_k(R)$ et $B\in M_{k,1}(R)$. Soit $\left(U_n\right)$ une suite de matrices colonnes de $M_{k,1}(R)$ telle que

$$\forall n\in N, U_{n+1} = AU_n + B$$

Si la suite $\left(U_n\right)$ converge alors sa limite $U \in M_{k,1}(R)$ vérifie

$$U = AU + B$$

Preuve

La preuve repose sur la continuité de l'application $U \longmapsto AU+B$ dans $M_{k,1}(R)$

Exemple 2

Soient les suites $\left(a_n\right)$ et $\left(b_n\right)$ définies par $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et

$$\forall n\in N, \{a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n - \frac{1}{5}b_n - 1\ b_{n+1} =- \frac{2}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + 1$$

Posons alors, soit $n\in N$,

$$U_n = \left(a_n\ b_n\right) B = (-\ 1\ 1\ )\ A = \frac{1}{5}(2\ \ -1\ \ -2\ 3\ )$$

Ainsi,

$$U_0 = \left(a_0\ b_0\right) = (0\ 1\ )\ et\ U_{n+1} = AU_n + B$$

Calculons d'abord U telle que $U = AU + B$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow U - AU = B \Leftrightarrow \left(I_2 - A\right)U = B$$

Or,

$$\left|I_2 - A\right| = \left(\frac{1}{5}\right)^2 |3\ 1\ 2\ 2\ | = \frac{3\times2-1\times2}{25} = \frac{4}{25}\neq 0$$

On en déduit que $I_2 - A$ est inversible et

$$\left(I_2 - A\right)^{-1} = \frac{25}{4}\times\frac{1}{5}(2\ \ -1\ \ -2\ 3\ ) = \frac{5}{4}(2\ \ -1\ \ -2\ 3\ )$$

Donc

$$(1)\Leftrightarrow U = \left(I_2 - A\right)^{-1}B = \frac{5}{4}(2\ \ -1\ \ -2\ 3\ )(-\ 1\ 1\ ) = \frac{1}{4}(-\ 15\ 25\ )$$

Posons alors, soit $n\in N$,

$$V_n = U_n - U$$

Ainsi,

$$V_{n+1} = U_{n+1} - U = AU_n + B - (AU + B) = A\left(U_n - U\right) = AV_n$$

Ainsi, d'après la propriété 1,

$$\forall n\in N, V_n = A^nV_0$$

Or,

$$V_0 = U_0 - U = (0\ 1\ ) - \frac{1}{4}(-\ 15\ 25\ ) = \frac{1}{4}(15\ \ -\ 21\ )$$

Comme dans l'exemple 1, on va montrer que A est diagonalisable pour pouvoir trouver une expression de V_n puis de U_n. Dans le cadre du cours de mathématiques expertes, les exercices donneront à chaque fois la formule finale de V_n qu'il suffira alors de vérifier par récurrence.

Calculons le polynôme caractéristique de A

$$\chi_A(X) = \left|XI_2 - A\right| = \left|X - \frac{2}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ X - \frac{3}{5}\ \right| = \left(X - \frac{2}{5}\right)\left(X - \frac{3}{5}\right) - \frac{2}{25} = X^2 - X + \frac{4}{25}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} > 0$$

Ce polynôme possède donc deux racines distinctes et simples x_1 et x_2.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5} = \frac{1}{5}\ et\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{8}{5} = \frac{4}{5}$$

A est donc diagonalisable, c'est-à-dire que A s'écrit sous la forme d'une matrice diagonale

$$D = \frac{1}{5}(1\ 0\ 0\ 4\ )$$

dans une base de vecteurs propres constituée de 2 vecteurs non nuls $X_1(x\ y\ )$ et $X_2\left(x'\ y'\right)$ tels que

$$AX_1 = \frac{1}{5}X_1\ (1)\ et\ AX_2 = \frac{4}{5}X_2\ (2)$$

Or,

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{5}(2\ \ -1\ \ -2\ 3\ )(x\ y\ ) = \frac{1}{5}(x\ y\ )\Leftrightarrow\{2x - y = x\ \ -2x + 3y = y \Leftrightarrow y = x$$

Donc $X_1 = (1\ 1\ )$ convient.

Par ailleurs,

$$(2)\Leftrightarrow\frac{1}{5}(2\ \ -1\ \ -2\ 3\ )\left(x'\ y'\right) = \frac{4}{5}\left(x'\ y'\right)\Leftrightarrow\{2x' - y' = 4x'\ \ -2x' + 3y' = 4y' \Leftrightarrow y' =- 2x'$$

Donc $X_3 = (1 \quad -2)$ convient.

On pose alors

$$B = (1\ 1\ 1 \quad -2)$$

Et donc, en remarquant que B est inversible car $|B| = 1\times(-2) - 1\times1 = -3\neq0$,

$$B^{-1} = -\frac{1}{3}(-2 \quad -1 \quad -1\ 1) = \frac{1}{3}(2\ 1\ 1 \quad -1)$$

Ainsi, on peut vérifier que

$$A = BDB^{-1}$$

On en déduit ainsi que, par une récurrence évidente, soit $n\in N$,

$$A^n = BD^nB^{-1}$$

Ainsi,

$A^n = (1\ 1\ 1 \quad -2)\times\frac{1}{5^n}\left(1\ 0\ 0\ 4^n\right)\times\frac{1}{3}(2\ 1\ 1 \quad -1) = \frac{1}{3\times5^n}\left(1\ 4^n\ 1 \quad -2\times4^n\right)(2\ 1\ 1 \quad -1)A^n = \frac{1}{3\times5^n}\left(2 + 4^n\ 1 - 4^n\ 2 \right.$

Et donc

$V_n = A^nV_0 = \frac{1}{3\times5^n}\left(2 + 4^n\ 1 - 4^n\ 2 - 2\times4^n\ 1 + 2\times4^n\right)\times\frac{1}{4}(15 \quad -21) = \frac{1}{12\times5^n}\left(9 + 36\times4^n\ 9 - 72\times4^n\right) = \frac{3}{4\times5^n}\left(1\right.$

Soit

$$U_n = V_n + U = \frac{3}{4\times5^n}\left(1 + 4^{n+1}\ 1 - 2\times4^{n+1}\right) + \frac{1}{4}(-15\ 25)$$

On en déduit donc que, soit $n\in N$,

$$a_n = -\frac{15}{4} + \frac{3\left(1+4^{n+1}\right)}{4\times5^n}\ et\ b_n = \frac{25}{4} + \frac{3\left(1-2\times4^{n+1}\right)}{4\times5^n}$$

On peut remarquer que ces deux suites convergent bien respectivement vers $-\frac{15}{4}$ et $\frac{25}{4}$

En effet, soit $n\in N$,

$$\frac{3\left(1+4^{n+1}\right)}{4\times5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n\times\frac{\frac{3}{4^n}+12}{4}$$

Or,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0\ et\ \left(\frac{\frac{3}{4^n}+12}{4}\right) = 3$$

Donc, par produit et somme de limites,

$$\left(a_n\right) = -\frac{15}{4}$$

De la même façon, soit $n\in N$,

$$\frac{3\left(1-2\times4^{n+1}\right)}{4\times5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n\times\frac{\frac{3}{4^n}-24}{4}$$

Or,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0\ et\ \left(\frac{\frac{3}{4^n}-24}{4}\right) = -6$$

Donc, par produit et somme de limites,

$$\left(b_n\right) = \frac{25}{4}$$

Remarque

Il peut y avoir une solution à l'équation $U = AU + B$ sans que la suite $\left(U_n\right)$ ne converge. Il suffit de considérer la matrice $A = (1\ 1\ 1\ 1)$ pour s'en convaincre. Dans le supérieur, on définira une norme pour les matrices qui permettra notamment de donner une condition suffisante pour que la suite converge.

II. Chaînes de Markov

Définition 3

Soit $\left(X_n\right)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble $\chi\subset R$. $\left(X_n\right)$ est une **chaîne de Markov** si pour tout entier $n\in N$ et pour tout $n+2-uplet$ $\left(x_0 ; x_1 ; ... ; x_n ; x_{n+1}\right)\in\chi^{n+2}$ tel que

$$P\left(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\right) = P\left(\cap_{i=0}^{n}X_i = x_i\right) > 0$$

l'égalité suivante est vérifiée

$$P\left(X_{n+1}=x_{n+1}|X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x_n\right)=P\left(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n\right)=P_{X_n=i_n}\left(X_{n+1}=x_{n+1}\right)$$

La chaîne est **homogène** si

$$\forall n \in N^{\times}, \forall x_i, x_j \in \chi^2, P\left(X_{n+1}=x_j|X_n=x_i\right)=P\left(X_n=x_j|X_{n-1}=x_i\right)$$

Remarques

- Autrement dit, $P\left(X_{n+1}=x_{n+1}|X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x_n\right)$ ne dépend que de n, x_n et x_{n+1}.
- Dire que $\left(X_n\right)$ est une chaîne de Markov signifie que, soit $n \in N$, X_{n+1} est indépendant du vecteur aléatoire $\left(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\right)$ sachant X_n.
- Dans une chaîne de Markov, la valeur de X_{n+1} ne dépend que de la valeur de X_n. On parle alors de processus sans mémoire.
- Dans ce contexte, l'événement $X_n=x_n$ se traduit par la phrase « l'état à l'instant n vaut x_n »

Exemple 3 (Fortune du joueur)
Un joueur dispose de m euros. A chaque partie, le joueur gagne 1€ avec une probabilité de $p \in]0\,;1[$ et perd 1€ avec une probabilité $1-p$. La fortune du joueur après n parties est décrite par la variable aléatoire X_n. La suite $\left(X_n\right)$ est une chaîne de Markov homogène telle que

$$\forall n \in N, \forall i \in Z, P\left(X_n=i\right) \neq 0 \Longrightarrow P\left(X_{n+1}=j|X_n=i\right)=\{p\ si\ j=i+1\ 1-p\ si\ j=i-1\ 0\ sinon$$

Définition 4
Soit $k \in N^*$ et $\left(X_n\right)_{n \in N}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un ensemble fini $\chi=\left\{x_1\,;x_2\,;\dots;x_k\right\}$ où

$$x_1<x_2<\dots<x_k$$

La **matrice de transition** P de cette chaîne de Markov est la matrice $\left(p_{i,j}\right) \in M_k(R)$ telle que

$$\forall i, j \in [\![1, k]\!], p_{i,j}=P\left(X_1=x_j|X_0=x_i\right)$$

Remarques

- La condition $x_1<x_2<\dots<x_k$ permet de s'assurer l'unicité de la matrice de transition même si dans la littérature mathématique cette condition n'est pas formulée (mais plutôt implicite). Cela dit, le problème reste le même (malgré les $n\,!$ rangements possibles de χ) car les matrices trouvées dans chacun des cas ont les mêmes caractéristiques. La plupart du temps, on se placera dans le cas où $\chi=[\![1, k]\!]$ et ainsi
$$\forall i, j \in [\![1, k]\!], p_{i,j}=P\left(X_1=j|X_0=i\right)$$
- Par définition, tous les coefficients de cette matrice sont positifs ou nuls.
- La somme des coefficients de chaque ligne d'une telle matrice égale 1. En effet, soit $i \in [\![1, k]\!]$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\sum_{j=1}^{k} p_{i,j}=\sum_{j=1}^{k} P\left(X_1=x_j|X_0=x_i\right)=\sum_{j=1}^{k} \frac{P\left(X_1=x_j \cap X_0=x_i\right)}{P\left(X_0=x_i\right)}=\frac{1}{P\left(X_0=x_i\right)} \sum_{j=1}^{k} P\left(X_1=x_j \cap X_0=x_i\right) \sum_{j=1}^{k} p_{i,j}=\frac{P\left(X_0=x_i\right)}{P\left(X_0=x_i\right)}=1$$

Définition 5
Soient $k \in N^*$ et $\left(X_n\right)_{n \in N}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un ensemble fini $\chi=\left\{x_1\,;x_2\,;\dots;x_k\right\}$ où

$$x_1<x_2<\dots<x_k$$

La **loi de probabilité** π_n de la variable X_n est la matrice ligne $\left(l_i\right) \in M_{1,k}(R)$ telle que

$$\forall i \in [\![1, k]\!], l_i=P\left(X_n=x_i\right)$$

Propriété 3
Soient $k\in N^*$ et $(X_n)_{n\in N}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un ensemble fini $\chi = \{x_1 ; x_2 ; ... ; x_k\}$ où $x_1 < x_2 < ... < x_k$ de matrice de transition $P = (p_{i,j})$. Soit $n\in N$, π_n désigne la loi de probabilité de la variable X_n

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

En particulier, si la chaîne part de x_i, $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{l_i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et si l'on note $P^n_{i,j}$ les coefficients de la matrice P^n

$$P(X_n = x_j) = P(X_n = x_j | X_0 = x_i) = P^n_{i,j}$$

Preuve
Soit $n\in N$. Soit $A = (a_j) \in M_{1,k}(R)$ telle que

$$A = \pi_n P$$

Donc, par homogénéité de la chaîne de Markov et d'après la formule des probabilités totales,

$$\forall j\in[\![1, k]\!], a_j = \sum_{i=1}^{k} P(X_n = x_i)p_{i,j} = \sum_{i=1}^{k} P(X_n = x_i)P(X_1 = x_j|X_0 = x_i) = \sum_{i=1}^{k} P(X_n = x_i)P(X_{n+1} = x_j|X_n = x_i)$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} P(X_{n+1} = x_j \cap X_n = x_i) = P(X_{n+1} = x_j)$$

On en déduit que

$$\pi_{n+1} = \pi_n P \ (1)$$

Par une récurrence évidente, on peut alors montrer que

$$\pi_n = \pi_0 P^n \ (2)$$

Si $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{l_i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, la formule (2) permet d'affirmer que

$$\pi_n = \pi_0 P^n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{l_i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^n = \left(P^n_{i,j}\right)_{j\in[\![1,k]\!]}$$

Ainsi, par identification avec π_n

$$\forall j\in[\![1, k]\!], P(X_n = x_j) = P^n_{i,j}$$

Théorème 1
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Soit $n\in N$, π_n désigne la loi de probabilité de la variable X_n. S'il existe un entier n tel que la matrice P^n ne contienne pas de 0 alors la suite (π_n) converge vers la matrice π vérifiant

$$\pi = \pi P$$

et cette limite ne dépend pas de π_0.

Remarque
Pour montrer le théorème 1, il faut introduire des notions qui débordent largement du programme de maths expertes. Nous allons cependant considérer quelques exemples pour mieux cerner le problème.

Exemple 4
Une roue comprend 3 secteurs 1,2 et 3. Une flèche indique le secteur obtenu lorsque la roue tourne dans le sens croissant. On considère les variables X_n qui indiquent quel secteur est désigné par la flèche après n changements de secteurs. Ainsi, $(X_n)_{n\in N}$ est une chaîne de Markov homogène de support $\chi = [\![1, 3]\!]$ telle que, soient $n\in N$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in [\![1, 3]\!]$,

$$P\left(X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\right) = P\left(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n\right) = \{1\ si\ x_{n+1} - x_n \in \{-\ 2; 1\}\ 0\ sinon$$

La matrice de transition de cette chaîne est

$$P = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ )$$

- Si l'on place la flèche au hasard sur un secteur au départ, on peut déterminer ainsi la loi de probabilité de X_0

$$P\left(X_0 = 1\right) = P\left(X_0 = 2\right) = P\left(X_0 = 3\right) = \frac{1}{3}$$

Et ainsi

$$\pi_0 = \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right)$$

Or,

$$\pi_0 P = \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right)(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ ) = \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right) = \pi_1$$

On en déduit que, à l'aide d'une récurrence évidente,

$$\forall n \in N, \pi_n = \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right)$$

Dans ce cas, la suite $\left(\pi_n\right)$ converge vers $\pi = \pi_0$ vérifiant $\pi = \pi P$ mais qui dépend indéniablement de π_0

- Cette fois-ci, on suppose que la flèche désigne le secteur 1 au départ. Ainsi,

$$\pi_0 = (1\ 0\ 0\ )$$

$$\pi_1 = \pi_0 P = (1\ 0\ 0\ )(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ ) = (0\ 1\ 0\ )$$

$$\pi_2 = \pi_1 P = (0\ 1\ 0\ )(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ ) = (0\ 0\ 1\ )$$

$$\pi_3 = \pi_2 P = (0\ 0\ 1\ )(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ ) = (1\ 0\ 0\ )$$

En continuant le processus, on remarque aisément que $\pi_0 = \pi_3 = \pi_6$ ... et d'une manière générale, soit $k \in N$,

$$\pi_{3k} = \pi_0 = (1\ 0\ 0\ )$$

$$\pi_{3k+1} = \pi_1 = (0\ 1\ 0\ )$$

$$\pi_{3k+2} = \pi_2 = (0\ 0\ 1\ )$$

On en déduit que la suite $\left(\pi_n\right)$ ne converge pas.

- Supposons maintenant que $\pi_0 = (a\ b\ c\ )$ où $a, b, c \in R_+^*$ tels que $a + b + c = 1$

$$\pi_1 = \pi_0 P = (a\ b\ c\ )(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ ) = (c\ a\ b\ )$$

$$\pi_2 = \pi_1 P = (c\ a\ b\ )(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ ) = (b\ c\ a\ )$$

$$\pi_3 = \pi_2 P = (b\ c\ a\ )(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ ) = (a\ b\ c\ )$$

On se retrouve dans le même cas de figure que précédemment et la suite $\left(\pi_n\right)$ ne converge pas sauf si

$$a = b = c = \frac{1}{3}$$

On pourra remarquer que la seule solution de l'équation $\pi = \pi P$ est $\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right)$ et que si $\pi_0 \neq \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right)$, la suite $\left(\pi_n\right)$ ne converge pas.

Exemple 5

Dans un jeu vidéo, si un joueur reçoit un coffre en or le premier jour, il aura chaque jour un coffre en or. S'il reçoit un coffre en argent, il recevra un coffre en platine ou en argent le jour suivant avec la même probabilité de 0,5. S'il reçoit un coffre en platine, il recevra un coffre en platine ou en argent le jour suivant avec la même probabilité de 0,5. On définit une suite de variables aléatoires $\left(X_n\right)_{n \in N}$ définies de la manière suivante :

$X_n = 1$ si le joueur reçoit un coffre en argent le $n + 1 - ième$ jour.

$X_n = 2$ si le joueur reçoit un coffre en platine le $n + 1 - ième$ jour.

$X_n = 3$ si le joueur reçoit un coffre en or le $n + 1 - ième$ jour.

On a ainsi défini une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$P = (0, 5\ 0, 5\ 0\ 0, 5\ 0, 5\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$$

Remarquons que

$$P^2 = (0, 5\ 0, 5\ 0\ 0, 5\ 0, 5\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$$

Et par extension,

$$\forall n \in N^*, P^n = (0,5\ 0,5\ 0\ 0,5\ 0,5\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$$

Posons alors $\pi_0 = (a\ b\ c\ )$ où $a, b, c \in R_+^*$ tels que $a + b + c = 1$

$$\pi_n = \pi_0 P^n = (a\ b\ c\ )(0,5\ 0,5\ 0\ 0,5\ 0,5\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (0,5a + 0,5b\ 0,5a + 0,5b\ c\ )$$

La suite $\left(\pi_n\right)$ converge vers $\pi = (0,5a + 0,5b\ 0,5a + 0,5b\ c\ )$ qui dépend de π_0.

On notera que l'équation $\pi = \pi P$ admet une infinité de solutions de la forme $(a\ a\ c\ )$ où $a, c \in R$

Exemple 6

Une fourmi se déplace sur un triangle équilatéral ABC. À chaque fois qu'elle arrive sur un sommet, elle repart vers un autre sommet avec la même probabilité de 1/2. On définit une suite de variables aléatoires $\left(X_n\right)_{n \in N}$ définies de la manière suivante :

$X_n = 1$ si la fourmi est sur le sommet A après n cheminements.

$X_n = 2$ si la fourmi est sur le sommet B après n cheminements.

$X_n = 3$ si la fourmi est sur le sommet C après n cheminements.

On a ainsi défini une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$P = (0\ 0,5\ 0,5\ 0,5\ 0\ 0,5\ 0,5\ 0,5\ 0\ )$$

Remarquons que

$$P^2 = (0,5\ 0,25\ 0,25\ 0,25\ 0,5\ 0,25\ 0,25\ 0,25\ 0,5\ )$$

Nous sommes dans le cas d'application du théorème 1 donc $\left(\pi_n\right)$ converge vers l'unique solution de l'équation

$\pi = \pi P \Leftrightarrow (a\ b\ c\ ) = (a\ b\ c\ )(0\ 0,5\ 0,5\ 0,5\ 0\ 0,5\ 0,5\ 0,5\ 0\ ) \Leftrightarrow (a\ b\ c\ ) = (0,5b + 0,5c\ 0,5a + 0,5c\ 0,5a + 0,5b\ ) \Leftrightarrow \{$

Or, π étant une loi de probabilité,

$$a + b + c = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Donc $\left(\pi_n\right)$ converge vers $\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right)$

Par ailleurs, si l'on veut connaître la probabilité de se retrouver au sommet A au bout de 5 déplacement à partir de A, il suffit de calculer

$$\pi_5 = \pi_0 P^5 = (1\ 0\ 0\ )P^5 = (1\ 0\ 0\ )\left(\frac{10}{32}\ \frac{11}{32}\ \frac{11}{32}\ \frac{11}{32}\ \frac{10}{32}\ \frac{11}{32}\ \frac{11}{32}\ \frac{11}{32}\ \frac{10}{32}\ \right) = \left(\frac{10}{32}\ \frac{11}{32}\ \frac{11}{32}\ \right)$$

Donc

$$P\left(X_5 = 1\right) = \frac{10}{32}$$

Exemple 7

Dans un jeu vidéo, un joueur reçoit un coffre en or ou un coffre en argent par jour. S'il reçoit un coffre en argent, la probabilité d'obtenir un coffre en or le jour suivant sera de 0,3. S'il reçoit un coffre en or, la probabilité d'obtenir un coffre en argent le jour suivant sera de 0,6. On définit une suite de variables aléatoires $\left(X_n\right)_{n \in N}$ définies de la manière suivante :

$X_n = 1$ si le joueur reçoit un coffre en argent le $n + 1 - ième$ jour.

$X_n = 2$ si le joueur reçoit un coffre en or le $n + 1 - ième$ jour.

On a ainsi défini une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$P = (0,7\ 0,3\ 0,6\ 0,4\ )$$

Nous sommes dans le cas d'application du théorème 1 donc $\left(\pi_n\right)$ converge vers l'unique solution de l'équation

$\pi = \pi P \Leftrightarrow (a\ b\ ) = (a\ b\ )(0,7\ 0,3\ 0,6\ 0,4\ ) \Leftrightarrow (a\ b\ ) = (0,7a + 0,6b\ 0,3a + 0,4b\ ) \Leftrightarrow \{a = 0,7a + 0,6b\ b = 0,3a +$

Or, π étant une loi de probabilité,

$$a + b = 1 \Leftrightarrow 3b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$$

Donc $\left(\pi_n\right)$ converge vers $\left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \right)$

On peut interpréter ce résultat en disant que sur le long terme, un joueur obtient un coffre en or un jour sur trois en moyenne.

On peut aussi par exemple calculer la probabilité d'obtenir un coffre en or le 4e jour sachant que l'on a reçu un coffre en or le premier jour.

$$\pi_3 = \pi_0 P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,666 & 0,334 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,666 & 0,334 \end{pmatrix}$$

Donc

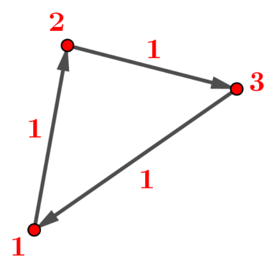
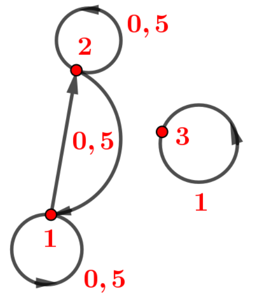
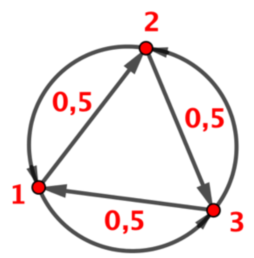
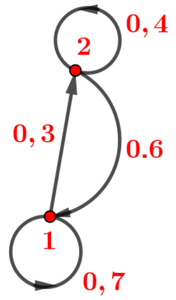
$$P\left(X_3 = 2\right) = 0,334$$

On peut remarquer que la probabilité trouvée est très proche de la probabilité limite (la convergence est très rapide) et très peu différente si le joueur avait obtenu un coffre en argent le premier jour.

III. Lien avec les graphes

On peut associer une chaîne de Markov possédant un nombre fini d'états à une matrice de transition finie et donc à un graphe orienté pondéré c'est-à-dire un graphe où chaque arête entre deux sommets i et j possède un poids différent qui correspond à la probabilité $p_{i,j} = P\left(X_1 = x_j | X_0 = x_i\right)$.

On peut ainsi reprendre les exemples précédents.

Exemple	4	5	6	7
Graphe				

Exemple 8 ***Les urnes d'Ehrenfest***

Le physicien Paul Ehrenfest développa en 1907 un modèle pour montrer qu'un modèle microscopique réversible pouvait conduire à un modèle macroscopique irréversible.

On dispose de 2 urnes A et B et de k boules dans ces 2 urnes. À chaque étape, on choisit une des k boules au hasard et on la met dans l'autre urne. On note X_n le nombre de boules contenues dans l'urne A après n étapes.

On a ainsi défini une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

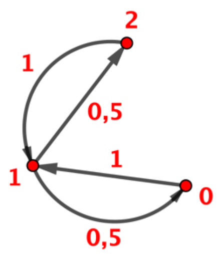
En remarquant que $P = \left(p_{i,j}\right) \in M_{k+1}(R)$ où

$$\forall i, j \in [\![1, k+1]\!], p_{i,j} = P\left(X_1 = j - 1 | X_0 = i - 1\right)$$

Prenons par exemple le cas $k = 2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé est le suivant.



$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

On remarque ensuite que $P^3 = P$ et donc, par une récurrence évidente, soit $p \in N^*$,

$$P^{2p} = P^2$$
$$P^{2p+1} = P$$

Les conditions du théorème 1 ne sont pas remplies et $\left(\pi_n\right)$ ne converge pas sauf si $\pi_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ est un état stable, c'est-à-dire si

$$\pi_0 = \pi_0 P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5b & a + c & 0,5b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5b \\ b = a + c \\ c = 0,5b \end{cases} \Leftrightarrow a = c = 0,5b$$

Or, π étant une loi de probabilité,

$$a + b + c = 1 \Leftrightarrow 2b = 1$$

On en déduit que $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est le seul état stable.

On remarque par ailleurs que si l'on prend des valeurs de k de plus en plus grandes, le système tend à se stabiliser malgré tout autour de $k/2$ justifiant l'hypothèse de départ.

Voici un programme Python pour simuler le modèle d'Ehrenfest.

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt

def ehrenfest(n_boules, n_etapes):
    urne_a = n_boules  # Initialement, toutes les boules sont dans l'urne A
```

```
    urne_b = 0
    historique_a = [urne_a]

    for _ in range(n_etapes):
        # Choisir une boule au hasard
        boule_choisie = random.randint(1, n_boules)

        # Déplacer la boule
        if boule_choisie <= urne_a:
            urne_a -= 1
            urne_b += 1
        else:
            urne_a += 1
            urne_b -= 1

        historique_a.append(urne_a)

    return historique_a

# Paramètres de la simulation
n_boules = 1000
n_etapes = 5000

# Exécuter la simulation
historique_a = ehrenfest(n_boules, n_etapes)

# Tracer les résultats
plt.plot(historique_a)
plt.xlabel("Étape")
plt.ylabel("Nombre de boules dans l'urne A")
plt.title("Modèle d'Ehrenfest")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Voici les résultats obtenus si l'urne A contient toutes les boules au départ et pour respectivement

$$k = 10, k = 100, k = 1\,000, k = 10\,000$$
$$n = 50, n = 500, n = 5\,000, n = 50\,000$$