Vamos agora apresentar o nosso trabalho de Geometria Descritiva que explora o tema das **interseções entre sólidos** e a sua aplicação em casos arquitetónicos e em exercícios práticos.
Para começar, vamos apresentar uma visão geral sobre as interseções entre sólidos. Um dos aspetos mais importantes são os **tipos de interseção**. Existem 4 tipos de interseção: a **mordedura** ou arrancamento, caracterizada por criar uma linha única de interseção entre os dois sólidos, a **penetração**, que cria duas linhas distintas de interseção entre os dois sólidos, o **beijamento simples** ou penetração tangencial, no qual são criadas duas linhas distintas de interseção, que são tangentes num ponto e finalmente o **beijamento duplo** ou penetração máxima, que se caracteriza pela criação de duas linhas de interseção distintas que são tangentes em dois pontos.

Para se distinguirem os diferentes tipos de interseções, é necessária uma **análise das posições dos planos limites** em relação aos sólidos: sempre que um dos planos seja tangente a um dos sólidos e secante ao outro e outro plano seja tangente ao segundo sólido e secante ao outro, trata-se de uma mordedura. Sempre que os dois planos limites forem tangentes ao mesmo sólido e secantes ao outro, trata-se de uma penetração. Sempre que um plano limite for tangente aos dois sólidos e o outro plano for tangente a um dos sólidos e secante ao outro trata-se de um beijamento simples. Por fim, sempre que os dois planos limites forem tangentes aos dois sólidos trata-se de um beijamento duplo.

Como é óbvio, para identificarmos os tipos de interseções recorremos a **planos limites**. Mas o que são planos limites? Planos limites são dois planos que nos dão os extremos da linha de interseção entre dois sólidos. Para encontrar planos limites recorremos às retas de interseções entre os dois prismas ou recorremos a retas auxiliares que nos permitem descobrir a direção dos planos. Depois o processo baseia-se em encontrar planos que sejam tangentes aos dois sólidos ou tangentes a um sólido e secantes ao outro. Mas explicaremos melhor o processo durante a resolução dos exercícios.

Passando agora aos casos arquitetónicos, procedemos a uma simplificação do **Museu da História Militar de Dresden** na Alemanha e ficamos com uma interseção entre três prismas. Neste caso, é escusado o recurso a planos limites pelo facto das arestas laterais dos sólidos serem projetantes e paralelas entre si e a determinação do tipo de interseção é feita empiricamente: trata-se de uma **mordedura** entre o cubo e o prisma triangular e uma **penetração** entre o prisma triangular e o paralelepípedo. Depois, já se pode proceder à resolução do exercício. Em relação à interseção entre o cubo e o prisma triangular, a face [II'HH'] do cubo interseta a face [EE'FF'] segundo a aresta [TT'], que fica coincidente com a projeção frontal da aresta [II']. A face [JJ'KK'] interseta a face [EE'FF'] segundo a aresta [UU'], cuja projeção frontal fica coincidente com a aresta [JJ']. No que diz respeito à interseção entre o prisma triangular e o paralelepípedo, a face [BB'CC'] do paralelepípedo interseta a face [EE'GG'] do prisma segundo a aresta [XX'] e a face [FF'GG'] do prisma segundo a aresta [ZZ']. A face [AA'DD'] do paralelepípedo interseta a face [EE'GG'] segundo a aresta [WW'] e a face [FF'GG'] segundo a aresta [YY']. Por fim, representamos as respetivas invisibilidades e o exercício está resolvido.

No caso do **Tribunal Europeu dos Direitos Humanos**, procedemos também a uma simplificação e ficamos com dois cilindros. Conseguimos descobrir empiricamente que se trata de uma **mordedura** e não é necessário o recurso a planos limites pelo facto das geratrizes dos dois sólidos serem projetantes e paralelas entre si. O processo é muito simples: faz-se recorrendo às geratrizes dos cilindros. definimos as geratrizes comuns entre os dois sólidos, segundo as quais eles se intersetam. Tendo em conta que as bases inferiores e superiores dos dois cilindros têm cotas diferentes, é de notar que as bases do cilindro maior cortam a superfície do cilindro menor segundo os arcos [AB] e [A’B’] Em seguida desenharam-se as projeções do conjunto tendo em conta as invisibilidades e visibilidades.

Passamos agora a exercícios que nós próprias criamos e que nos permitiram explorar melhor os diferentes tipos de interseções, vamos começar por uma **mordedura** entre um cone e um cilindro.

Após a construção dos sólidos, começa-se por passar pelo vértice uma reta de topo paralela as geratrizes do cilindro, pois esta é a reta de interseção dos dois planos limites δ, de topo, e ρ de perfil. Sendo ρ tangente ao cilindro e secante ao cone e δ tangente ao cone e secante ao cilindro **determina-se assim que é uma interseção por mordedura.** De seguida, determina-se os pontos A e I através do plano de topo. Passa-se depois um plano horizontal ν pelo centro do cilindro que nos permite determinar os pontos E e M. Colocou-se um plano π, de topo pela reta t que corta o cone segundo um triângulo criando H e J e o cilindro segundo um retângulo fazendo-nos descobrir B e Q. Depois basta repetir o mesmo processo para descobrir os pontos por determinar ainda. Passa-se mais um plano de topo α que também corta o cone segundo um triângulo criando C e P e o cilindro segundo um retângulo criando G e K.

Logo depois, recorre-se a outros dois planos horizontais ν’ e ν’’ que nos permitem descobrir F e L, D e N, respetivamente. Posteriormente, basta ligar todos os pontos, prestando atenção às invisibilidades.

Para exemplificar a penetração criamos uma interseção entre um prisma pentagonal e um prisma hexagonal. Começamos por definir os planos limite, utilizando duas retas auxiliares: uma reta v vertical paralela às arestas do prisma hexagonal e uma reta h fronto-horizontal, paralela às arestas do prisma pentagonal. O plano φ definido pelas duas retas, é um plano frontal que contém a direção dos planos limites.

Neste caso os planos limites ρ e ρ’ são os planos limites, que são tangentes ao prisma pentagonal e secantes ao prisma hexagonal, o que nos **permite afirmar que se trata de uma penetração**, que gera duas linhas distintas.

Passamos agora a definir os pontos de interseção que podemos conseguir através dos planos limites. O plano ρ contém as arestas [HH'] e [II'] do prisma pentagonal e secciona o prisma hexagonal segundo um retângulo. A aresta [HH'] intersecta o retângulo nos pontos N e P e a aresta [II'] intersecta o retângulo nos pontos N' e P'. O plano ρ contém a aresta [KK'] do prisma pentagonal e secciona o prisma hexagonal segundo um retângulo. A aresta [KK'] interseta esse retângulo nos pontos O e O'.

Vamos, em seguida, recorrer a planos auxiliares para a determinação dos restantes pontos. Os planos auxiliares deverão ser frontais e deverão conter as arestas laterais de cada um dos sólidos que estejam compreendidas entre ρ e ρ'.

Recorre-se a um plano frontal que contenha as arestas [GG'] e [JJ'] do prisma pentagonal que secciona o prisma hexagonal segundo um retângulo. A aresta [GG'] intersecta esse retângulo nos pontos M e M' e a aresta [JJ'] interseta esse retângulo nos pontos Q e Q'.

Recorre-se a um plano frontal φ que contenha as arestas [CC'] e [FF'] do prisma hexagonal. Este secciona o prisma pentagonal segundo um retângulo. Este determinou-se com o recurso ao rebatimento previamente efetuado da base mais à direita do prisma pentagonal.

A aresta [CC'] intersecta esse retângulo nos pontos L e R. A aresta [FF'] interseta aquele retângulo nos pontos L’ e R’. A partir dos pontos já determinados, desenharam-se as projeções dos dois sólidos e das duas linhas resultantes da sua intersecção, respeitando as respetivas invisibilidades.

Agora, vamos apresentar um exercício de dois sólidos que se intersetam segundo um beijamento simples, uma pirâmide pentagonal e um paralelepípedo. Pelo vértice passou-se uma reta t, de topo, paralela às arestas laterais do prisma. Sendo esta a reta de interseção dos dois planos limites ν e α. ν é um plano horizontal que é tangente aos dois sólidos e α é tangente à pirâmide (na aresta [BV]) e secante ao prisma permitindo-nos **determinar que esta interseção é um beijamento simples.** Voltando aos planos, ν faz-nos identificar o ponto N e α os pontos K e S. Para facilitar o processo, ao identificar os pontos já podemos ligá-los, respeitando as invisibilidades. De seguida, pela aresta [AV] passamos, um plano π, de topo, que faz-nos determinar L e Q. Assim, podemos ligar K a L e a N, e Q a S. Após isto, repete-se o mesmo processo, mas agora com a aresta [EV]. Passou-se um plano δ, também de topo, que nos permite determinar os pontos P e M ligando P a Q e M a L e a N. Agora, conduziu-se um plano θ pela aresta [CV] que nos faz determinar J e V. Ligamos J a K e a N e V a S. Pela aresta lateral do prisma, que contém F e pela reta de topo t conduziu-se um plano ω que corta a pirâmide segundo um triângulo e faz-nos determinar os pontos F e R. Ligando-se F a T, T a V e R a Q. Assim, podemos dar esse exercício por terminado.

Para exemplificar **o beijamento duplo** criamos uma interseção entre uma pirâmide hexagonal e um prisma quadrangular e um prisma hexagonal. Comecemos, mais uma vez, por determinar os planos limites nesta situação

Pelo vértice da pirâmide conduz-se uma reta t, de topo, paralela às arestas do prisma. A reta t é a reta de intersecção dos dois planos limites e é projetante frontal, pelo que os planos limites são de topo. Os dois planos limites são tangentes aos dois sólidos, **pelo que a intersecção dos dois sólidos é um beijamento duplo (ou penetração máxima)**. A intersecção dos dois sólidos gera, assim, duas linhas tangentes entre si em dois pontos. Vamos, em seguida, determinar os pontos da intersecção dos dois sólidos que os planos limites nos permitem obter. O plano ρ contém a aresta [FV] da pirâmide, e a aresta [GG'], do prisma que são concorrentes num ponto K que é, já, um ponto da intersecção entre os dois sólidos. O plano ρ' contém a aresta [CV], da pirâmide e a aresta [II'], concorrentes num ponto K' que é, também, um ponto da intersecção entre os dois sólidos. K e K' são os pontos em que as duas linhas geradas pela intersecção são tangentes entre si.

Recorremos agora ao plano θ, o plano auxiliar que contém as arestas [AV] e [EV] da pirâmide, e que intersetam um prisma segundo um retângulo. A aresta [AV] interseta esse retângulo segundo os pontos L e M e a aresta [EV] interseta o mesmo retângulo segundo os pontos L' e M'. O plano θ' é o plano auxiliar que contem, as arestas [BV] e [DV] da pirâmide e que intersetam o prisma segundo um retângulo, sendo que a aresta [BV] interseta esse retângulo segundo os pontos N e O e a aresta (DV] interseta esse retângulo segundo os pontos N' e O.

Vamos, em seguida, recorrer ao plano δ de perfil que passe pelas arestas HH' e JJ' do prisma quadrangular e que secciona a pirâmide segundo um triangulo. Para obter os pontos da interseção recorremos ao rebatimento do plano, onde podemos averiguar os pontos de interseção entre as duas arestas em relação ao triângulo, obtendo assim os pontos Q e P e Q' e P'. A partir dos quatorze pontos determinados já é possível desenhar a projeção horizontal das linhas da intersecção entre os dois sólidos, uma vez que a projeção frontal daquelas é obtida imediatamente, tendo em conta as visibilidades/invisibilidades.