

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет
«Одеська політехніка»

Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни «Економетрія»

для студентів спеціальності F1 прикладна математика
(денна форма навчання)

Одеса
2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет
«Одеська політехніка»

Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни «Економетрія»

для студентів спеціальності F1 прикладна математика
(денна форма навчання)

Затверджено
на засіданні кафедри
ПМІТ Протокол № 1
Від 29.08.2025р.

Одеса
2025

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з Економетрії для студентів спеціальності F1 прикладна математика (денна форма навчання). / Укл.: Б.І. Юхименко – Одеса: 2025. - 46 с.

Методичні вказівки розроблені з метою підвищення компетентності студентів щодо використання статистичних методів прийняття рішень в організаційному управлінні. Матеріал методички представлений так, що містить опитування студентів за темою заняття, розбір прикладу, розв'язаного заздалегідь, розв'язання або обговорення іншого прикладу, оцінку рівня знань студентів з даного питання. Додано завдання для самостійної роботи, основні формули та міркування, необхідні для підготовки та виконання необхідної роботи.

Зміст

Вступ	4
Практичне заняття №1	6
Практичне заняття №2	8
Практичне заняття №3	12
Практичне заняття №4	14
Практичне заняття №5	17
Практичне заняття №6	22
Практичне заняття №7	25
Домашнє завдання	29
Варіанти завдань для самостійної роботи.....	36
Формули к кореляційно-регресивному аналізу та його додатків	37
Формули до систем масового обслуговування (СМО).....	41
Формули до матрично-балансовим моделям.....	42
Додатки.....	43
Список літератури	46

Вступ

Економетрія — це наука, що вивчає конкретні кількісні та якісні взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів за допомогою математичних і статистичних методів та моделей. Економетричні методи — це насамперед методи статистичного аналізу конкретних економічних даних.

Мета проведення практичних занять:

- поглиблення знань щодо існуючих економетричних методів;
- набуття навичок із постановки проблеми, вибору методу розв'язання та аналізу результатів;
- вміння розв'язувати задачі на базі фактичних значень факторів.

Загальна мета — виробити компетенцію з питань обробки статистичних даних та прийняття рішень.

Структура (склад) практичного заняття:

- перевірка теоретичних знань із питань заняття;
- розбір розв'язаного прикладу за темою;
- розв'язання або обговорення іншого прикладу;
- видача домашнього завдання;
- оцінювання знань за темою заняття.

Практичне заняття №1

Тема: Задачі кореляційно-регресійного аналізу та формування вибірки.

Питання за темою:

1. Основні задачі кореляційно-регресійного аналізу в економетричних дослідженнях:
 - побудова лінії регресії;
 - коефіцієнт кореляції;
 - коефіцієнт Фішера F
 - коефіцієнт Стьюдента S (t - відношення).
2. Вибірка та її призначення:
 - типи вибірок;
 - репрезентативність вибірки;
 - апроксимація даних вибірок;
 - прогнозування.
3. Алгоритм підбору сукупності незалежних факторів.
4. Алгоритм вибору залежного фактора за наявності альтернатив.

I заняття

- 1) $y = f(x)$ перевірити наявність кореляційно-функціональної залежності, якщо $r_{yx} = -0,7$; $r_{yx} = 0,4$; $r_{yx} = 0,7$. Про що свідчать ці значення коефіцієнтів парної кореляції?
- 2) $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перевірити наявність кореляційно-функціональної залежності. Дано:

$$R_{yx_1 \dots x_n} = 0,7; \quad R_{yx_1 \dots x_n} = -0,3; \quad R_{yx_1 \dots x_n} = 0,3.$$

Коли можливо визначити аналітичний вид функції?

3) Визначне аналітичний вид залежності $y = 0,088x + 0,890$. На основі вибірки обсягом 4. Пораховано коефіцієнт Фішера $F = 113,9$. Табличне значення при 95% достовірності $F_t = 98,5$, а при 98% достовірності $F_t = 114,7$. Чи можна дану лінію регресії вважати математичною моделлю?

4) На основі факторів y, x_1, x_2, x_3 . Визначено аналітичний вид залежності $y = 10x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 8$. Пораховані значення коефіцієнтів Стюдента $S_1 = 4,25; S_2 = 6,14; S_3 = 0,91$. Табличне значення коефіцієнта Стюдента при 95% значимості $S_t = 3,67$. Оскільки $S_3 < S_t$, то висувається гіпотеза про можливість виключити x_3 із розглядання.

Коли ця гіпотеза підтвердиться, якщо $R_{yx_1x_2x_3} = 0,7$, а $R_{yx_1x_2} = 0,65$ або якщо $R_{yx_1x_2x_3} = 0,7$, а $R_{yx_1x_2} = 0,35$?

5) При обсязі вибірки яка дорівнює 8 передбачається розглядати залежність $y = f(x_1, x_2, x_3)$. Обсяг вибірки явно недостатній. Яку залежність можна розглядати, якщо пораховано

$$r_{yx_1} = -0,3; \quad r_{yx_2} = 0,7; \quad r_{yx_3} = 0,3; \quad \text{та}$$

$$R_{yx_1x_2x_3} = 0,57; \quad R_{yx_1x_2} = 0,50; \quad R_{yx_2x_3} = 0,38$$

6) Приймається рішення про вибір залежного фактора, який змістовніше характеризуватиме зв'язок між факторами. Маємо групу незалежних факторів (x_1, x_2, x_3) та припускається залежні y_1 і y_2 . Яку

залежність слід розглядати $y_1 = f(x_1, x_2, x_3)$ або $y_2 = f(x_1, x_2, x_3)$. На основі вибірки пораховано $r_{y_1 y_2} = 0,98$; $R_{y_1 x_1 x_2 x_3} = 0,61$; $R_{y_2 x_1 x_2 x_3} = 0,68$;

$$r_{y_1 x_1} = 0,51; \quad r_{y_2 x_1} = 0,54$$

$$r_{y_1 x_2} = -0,4; \quad r_{y_2 x_2} = -0,5$$

$$r_{y_1 x_3} = 0,63; \quad r_{y_2 x_3} = 0,51$$

Практичне заняття №2

Тема: Метод найменших квадратів та його використання.

Питання за темою:

1. Ідея методу найменших квадратів.
2. Підбор виду залежного фактору від незалежних.
3. Підтвердження наявності кореляційно-функціональної залежності.
4. Системи нормальних рівнянь:

- випадок $y = f(x)$;

- випадок $y = f(x_1, x_2, \dots, x_e)$.

5. Визначення аналітичного вигляду залежності.
6. Визначення динаміки зміни значень фактора.
7. Визначення критичних точок.

II заняття

1. Визначити аналітичний вид залежності величини прибутку від обсягу виробництва.

Нехай y – прибуток, x – обсяг виробництва; визначить $y = f(x)$.

Припустимо, що залежність має лінійний вид. Тоді $y = bx + a$;
визначити аналітичний вид буде означати – визначити b та a .

Виходячи з нормальних рівнянь, маємо

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

Це практично математична модель апроксимації фактичних значень кінцевого результату y та незалежного фактора x (прибутку та обсягу виробництва).

У розглянутому випадку маємо: n фактичних значень прибутку $(y_i, i = \overline{1, n})$ та n значень обсягів виробництва, що зумовлюють даний прибуток $(x_i, i = \overline{1, n})$.

Початкові дані – вибірка приведена в таблиці

Місяць	Прибуток в т.грн., y	Обсяг виробництва в.т.тов., x	Розрахункові значення., y_p
1	10,2	8,3	9,94
2	12,1	9,1	11,65
3	11,3	9,1	11,65
4	10,1	8,4	10,16
5	11,4	9,2	11,87
6	12,3	9,3	12,08

Визначаються складові, що утворюють систему рівнянь.

Обсяг вибірки $n = 6$;

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 y_i &= 67,4; & \sum_{i=1}^6 x_i &= 53,4; \\ \sum_{i=1}^6 y_i x_i &= 601,7; & \sum_{i=1}^6 x_i^2 &= 476,2;\end{aligned}$$

Фактична система лінійних рівнянь з невідомими b та a наступна

$$\begin{cases} 67,4 = 6a + 53,4b \\ 601,7 = 53,4a + 476,2b \end{cases}$$

Із першого рівняння визначається $a = 11,23 - 8,90b$.

Вираз підставим в друге рівняння

$$601,7 = 53,4(11,23 - 8,9b) + 476,2b \Rightarrow b = 2,14$$

Визначається значення a

$$a = 11,23 - 8,9 \cdot 2,14 = -7,82$$

Лінія регресії, що апроксимує фактичні значення, має вигляд

$$y = 2,14x - 7,82$$

Є питання при якому обсязі виробництва 12,5 т.гр. прибутку.

$$2,5 = 2,14x - 7,82 \Rightarrow x = 9,5$$

2. Визначити ціну, при якій весь товар буде реалізовано.

Зібрано статистичні дані про флуктуації ціни на товар, зміну попиту та пропозиції залежно від ціни. Дані наведено нижче:

Ціна (x)	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3
Попит (y)	9,1	9,0	9,0	8,9	8,9	8,7
Пропозиція (z)	9,2	9,3	9,3	9,4	9,4	9,6

Необхідно визначити аналітичний вигляд залежності попиту від ціни та пропозиції від тієї ж ціни. Припустимо, що обидві ці залежності мають лінійний вигляд.

$$y = bx + a$$

$$z = b'x + a'$$

- де y – попит, z – пропозиція, x – ціна.

Використовуючи систему нормальних рівнянь, визначим складові b , b' , a та a' . Згідно таблиці вихідних статистичних даних, маємо

$$\begin{cases} 53,6 = 6a + 18,9b \\ 168,7 = 18,9a + 59,6b \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо $b = -0,6$; $a = 10,8$.

Залежність попиту від ціни описується такою лінією регресії $y = -0,6x + 10,8$

Система нормальних рівнянь для визначення пропозиції від ціни є наступною:

$$\begin{cases} 56,2 = 6a' + 18,9b' \\ 177,1 = 18,9a' + 59,6b' \end{cases}$$

Рішення наступне: $b' = 0,9$; $a' = 6,5$.

Залежність пропозиції від ціни подається такою кореляційною функцією:

$$z = 0,9x + 6,5$$

Коли попит збіжиться з пропозицією і настане момент, що весь товар реалізується тобто $y = z$; звідси

$$-0,6x + 10,8 = 0,9x + 6,5$$

Ставиться питання, за якою ціною виникне така ситуація. Розв'язання наведеної рівності дає:

$$x = 2,9$$

Можна перевірити, що ціна 2,9 зумовить рівноважність попиту та пропозиції.

$$y = -0,6 \cdot 2,9 + 10,8 = 9,06$$

$$z = 0,9 \cdot 2,9 + 6,5 = 9,11$$

Практичне заняття №3.

Тема: Математична модель залежності показників.

Питання за темою:

1. Проблема достовірності лінії регресії.
2. Коефіцієнт Фішера. Розрахункові та табличні значення.
3. Достовірність лінії регресії. Математична модель залежності факторів.
4. Ступінь впливу незалежного показника на залежний.
5. Дослідження та прогнозування на базі математичної моделі.

III заняття

Наведено фактичні дані про продуктивність праці на підприємстві, основні виробничі фонди та чисельність працівників.

Номер спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Продуктивність праці (y)	1,01	0,93	0,84	1,15	1,09	1,05	1,32	1,29	1,26
Основні виробничі фонди (x_1)	1,0	1,0	1,0	1,2	1,2	1,2	1,4	1,4	1,4
Чисельність працюючих (x_2)	1,2	1,4	1,6	1,2	1,4	1,6	1,2	1,4	1,6

Лінія регресії $y = 0,3994 + 0,9083x_1 - 0,2750x_2$

Коефіцієнт множинної кореляції $R = 0,9921$

Для перевірки на достовірність лінії регресії визначається коефіцієнт Фішера F .

$$F = S_{\hat{y}}^2 / S_{\hat{y}/x}^2 ;$$

$$S_{\hat{y}}^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 / m; \quad S_{\hat{y}/x}^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 / (n - m - 1);$$

- де n – обсяг вибірки; m – число незалежних факторів; $(n-m-1)$ – ступеней свободи.

Розв'язується $S_{\hat{y}}^2$;

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^9 y_k / 9 = 9,94 / 9 = 1,1;$$

$$(y_k - \bar{y}) := -0,9; -0,17; -0,26; 0,05; -0,01; -0,05; 0,22; 0,19; 0,16;$$

$$(y_k - \bar{y})^2 := 0,81; 0,03; 0,07; 0,00; 0,00; 0,00; 0,05; 0,04; 0,02;$$

$$\sum_{k=1}^9 (y_k - \bar{y})^2 = 1,02; \quad S_{\hat{y}}^2 = \frac{1,02}{2} = 0,51.$$

Розв'язується $y_{кр}$ – розрахункові значення згідно з лінією регресії.

$$y_1 = 0,91 \cdot 1 - 0,28 \cdot 1,2 + 0,40 = 0,97$$

$$y_2 = 0,91 \cdot 1 - 0,28 \cdot 1,4 + 0,40 = 0,91$$

$$y_3 = 0,91 \cdot 1 - 0,28 \cdot 1,6 + 0,40 = 0,86$$

$$y_4 = 0,91 \cdot 1,2 - 0,28 \cdot 1,2 + 0,40 = 1,15$$

$$y_5 = 0,91 \cdot 1,2 - 0,28 \cdot 1,4 + 0,40 = 1,10$$

$$y_6 = 0,91 \cdot 1,2 - 0,28 \cdot 1,6 + 0,40 = 1,04$$

$$y_7 = 0,91 \cdot 1,4 - 0,28 \cdot 1,2 + 0,40 = 1,33$$

$$y_8 = 0,91 \cdot 1,4 - 0,28 \cdot 1,4 + 0,40 = 1,27$$

$$y_9 = 0,91 \cdot 1,4 - 0,28 \cdot 1,6 + 0,40 = 1,22$$

$$(y_{кр} - y_{кр}) := 0,04; 0,02; -0,02; 0,00; -0,01; 0,01; -0,01; 0,02; 0,04;$$

$$(y_{кр} - y_{кр})^2 := 0,01; 0,01; 0,01; 0,00; 0,00; 0,00; 0,00; 0,01; 0,01$$

$$\sum_{k=1}^9 (y_{kf} - \bar{y}_{kp})^2 = 0,05; \quad \frac{2}{\bar{y}/x} = \frac{0,05}{6} = 0,01;$$

$$\text{Коефіцієнт Фішера} \quad F = \frac{1,10}{0,01} = 110;$$

Табличне значення F_t при 95% значущості дорівнює 93,2.

Лінія регресії є достовірною, оскільки розрахункове значення коефіцієнта є більшим за табличне. Лінію регресії можна використовувати як математичну модель при прогнозуванні. Це також підтверджується сильною корельованістю розглянутих факторів — коефіцієнт множинної кореляції є близьким до одиниці — $R = 0,9921$.

Ступінь впливу незалежного фактора на залежний зумовлює еластичність. У цьому прикладі еластичність продуктивності праці відносно основних виробничих фондів визначається за формулою:

$$E_{yx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = 0,908 \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}}$$

и чисельністю

$$E_{yx_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = -0,275 \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}};$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \sum_{k=1}^9 x_{1k} / 9 = \frac{10,8}{9} = 1,20; & \bar{x}_2 &= \sum_{k=1}^9 x_{2k} / 9 = \frac{12,6}{9} = 1,40; \\ \bar{y} &= \sum_{k=1}^9 y_k / 9 = \frac{9,94}{9} = 1,104; \end{aligned}$$

$$E_{yx_1} = 0,908 \cdot 0,905 = 0,822;$$

$$E_{ye_2} = -0,275 \cdot 1,268 = -0,349.$$

Якщо основні виробничі фонди збільшити на 1%, то продуктивність праці збільшиться на 0,82%, а якщо чисельність працівників збільшити на 1%, то продуктивність праці зменшиться на 0,35%.

Практичне заняття №4.

Тема: Виробничі функції.

Питання за темою:

1. Виробнича функція як засіб представлення залежності «витрати–випуск».
2. Виробнича функція, лінія регресії та математична модель залежності економічних показників. Що є що?
3. Похідні показники виробничих функцій:
 - середня віддача;
 - гранична віддача;
 - еластичність;
 - коефіцієнт заміщуваності.
4. Виробнича функція Кобба–Дугласа.
5. Похідні показники функції Кобба–Дугласа.
6. Прогнозування на базі функції Кобба–Дугласа

IV заняття

Основним представником виробничих функцій є функція Кобба-Дугласа. Вид функції

$$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad \text{або} \quad y = \tilde{a}_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

- де y – обсяг випуску продукції, x_1 та x_2 матеріальні і трудові затрати відповідно.

За звітними даними за кілька планових періодів (наприклад, за 8) сформовано вибірку та визначено аналітичний вигляд залежності функції Кобба-Дугласа. Маємо:

$$y = 16x_1^{0,6} \cdot x_2^{0,7}$$

Основні виробничі показники цієї функції наступні:

- y/x_1 – середня віддача, яка називається фондовіддача, має вигляд

$$y/x_1 = (16x_1^{0,6} \cdot x_2^{0,7})/x_1 = 16x_1^{-0,4} \cdot x_2^{0,7};$$

- y/x_2 – середня віддача за трудовими витратами, що називається продуктивністю праці, має вигляд:

$$y/x_2 = 16x_1^{0,6} \cdot x_2^{-0,3};$$

Гранична віддача або приріст продукції при прирості матеріальних витрат

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 16 \cdot 0,6x_1^{-0,4} \cdot x_2^{0,7} = 9,6x_1^{-0,4} \cdot x_2^{0,7},$$

і трудових витрат

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 16 \cdot 0,7x_1^{0,6} \cdot x_2^{-0,3} = 11,2x_1^{0,6} \cdot x_2^{-0,3}.$$

Еластичність випуску продукції по відношенню до матеріальних витрат

$$E_{yx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = 16 \cdot 0,6x_1^{-0,4} \cdot x_2^{0,7} \cdot x_1 / 16 \cdot x_1^{0,6} \cdot x_2^{0,7} = 0,6.$$

Аналогічно, еластичність по трудовим витратам

$$E_{yx_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = 16 \cdot 0,7x_1^{0,6} \cdot x_2^{-0,3} \cdot x_2 / 16x_1^{0,6} \cdot x_2^{0,7} = 0,7.$$

Коефіцієнт заміності матеріальних витрат трудовими і навпаки визначається як

$$\kappa_{12} = \frac{E_{yx_2} \cdot x_1}{E_{yx_1} \cdot x_2} = \frac{0,7 \cdot x_1}{0,6 \cdot x_2} ;$$

$$\kappa_{21} = \frac{E_{yx_1} \cdot x_2}{E_{yx_2} \cdot x_1} = \frac{0,6 \cdot x_2}{0,7 \cdot x_1} .$$

При обчисленні кількісних значень k_{12} та k_{21} можна брати середнє значення $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$.

Аналіз діяльності підприємства на основі функції Кобба-Дугласа показав:

- якщо збільшити на 1% матеріальні витрати, то обсяг випуску продукції збільшиться на 0,6%;
- аналогічно, збільшення трудових витрат на 1% призведе до збільшення випуску на 0,7%;
- при збільшенні на 1% і матеріальних, і трудових витрат обсяг випуску збільшиться на 1,3%.
- $(\alpha_1 + \alpha_2) = (0,6 + 0,7) = 1,3$ підприємство працює досить ефективно;
- виробництво матеріаломістке – потрібно більше вкласти матеріальних витрат, щоб на 1% збільшити обсяг випуску.

Практичне заняття №5.

Тема: Комерційні функції та дослідження попиту.

Питання за темою:

1. Комерційні функції та їх класифікація.
2. Види комерційних функцій попиту на товари масового вживання.
3. Прогнозування вигідної ціни на товар.
4. Дослідження попиту залежно від доходу населення.
5. Індивідуальна функція попиту. Співвідношення товарів.
6. Прогнозування попиту на конкретний товар масового вжитку.

V заняття

1. Розглядається функція попиту, що визначає залежність величини попиту на деякий товар масового вжитку при зміні його ціни. Аналітичний вигляд функції визначається методами кореляційно-регресійного аналізу на базі статистичних даних зміни попиту при зміні ціни. Дані отримані при дослідженні функціонування ринку попиту та пропозицій. Нехай визначено аналітичний вигляд функції попиту типу: $y = ax^{\alpha}$. Розглядаються дві функції з різними еластичностями. Дані про зміну цін, попиту та величини доходу наведені в таблиці:

$y = 200 \cdot x^{-0,2}$			$y = 200 \cdot x^{-0,5}$		
ціна	попит	дохід	ціна	попит	дохід
20,0	109,89	2198	20,0	44,74	895
20,2	109,65	2215	20,2	44,54	899
20,4	109,41	2232	20,4	44,25	903

Якщо x – ціна товару, y – величина попиту, то $y \cdot x$ називаєм доходом.

При початковій ціні, яка дорівнює 20,0 умовних одиниць, визначен попит та доход, для різних функцій попиту, тобто функцій які мають різну еластичність. При зміні ціни на 1% змінюється попит і, природно, величина доходу. Підвищення ціни на 2% більш яскраво показує збільшення доходу, хоча величина попиту в кількісному вираженні зменшується. Це означає, що підприємцю вигідно незначно підвищити ціну товару, дохід буде збільшуватися, попри зменшення попиту. Числові дані мають тестовий характер. Можна сказати «зібрані» на різних секторах ринку, оскільки мають різні показники ступеня.

2. Друга функція попиту зумовлює залежність величини попиту на товар масового вжитку від величини доходу населення, тобто $y = f(M)$, де M – доход, а y – попит. Коливання попиту безпосередньо залежить від значення величини грошей, що виділяються для придбання товару. Нехай аналітичний вигляд функції визначено, коли дохід змінювався в деяких межах, скажімо $M \in [p, q]$. Належність доходу до цих інтервалів ніби визначає категорію

товару в сенсі попиту. Якщо $p \leq M \leq q$, то $\frac{\partial y}{\partial M} \cdot \frac{M}{y} > 0$ і товар вважається вищої категорією. Далі, якщо $M > q$, то товар, попит на який досліджується, може перейти в нижчу категорію. Товар може бути замінений покупцями на більш якісний. Математично це виглядає так:

$$\frac{\partial y}{\partial M} \cdot \frac{M}{y} < 0$$

Еластичність попиту стає від'ємною величиною. Визначення граничних значень p та q є проблематичним. При формуванні вибірки для визначення аналітичного вигляду залежності ці значення мають враховуватися.

Як приклад наведемо функцію попиту та розрахуємо за нею попит зі зміною доходу

$y = 20M^{0,5}$	
M	y
100	200
101	201
102	202
...	...
110	210

Перевірте правильність визначення еластичності.

3. Індивідуальна функція попиту зумовлює попит на конкретний товар залежно від його ціни, цін супутніх товарів і доходу населення, що купує цей товар. Список супутніх товарів практично залежить від величини доходу конкретного економічного суб'єкта. Тому вона називається індивідуальною функцією попиту. Загальний вигляд

$$y_0 = f(x_a, x_b, \dots, x_k, M)$$

- де x_a ціна досліджуваного товару, $x_i (i = \overline{b, k})$ ціна супутніх товарів,

M – дохід покупця товару a .

Індивідуальна функція попиту використовується для:

- дослідження взаємовідносин між товарами;
- визначення приблизного обсягу попиту на конкретний товар для конкретного економічного суб'єкта;
- визначення можливого обсягу попиту на конкретний товар.

Нехай індивідуальна функція попиту на товар a має вигляд

$$y_a = 17x_a^{-0,2}x_b^{0,4}x_c^{-0,3}M^{0,1}.$$

Товари a та b взаємодоповнювані. Якщо на товар b буде зрости попит, то й на товар a також буде зрости. Товари a та c взаємодоповнювані. Якщо на c попит збільшиться, то на a буде зменшуватися.

Дослідження тенденції зміни попиту на товар a можна провести таким чином. Якщо на товар b та c попит збільшиться на один процент для кожного, то при постійній ціні на товар попит буде не змінним. Збільшення попиту на a за рахунок росту на b компенсується збільшенням попиту на c , як на взаємозамінного товару.

Інша ситуація. Нехай за прогнозними даними на товар c попит не зміниться. Зростання попиту на товар b та в силу взаємодоповнюваності товарів a та b , попит на a збільшиться.

Знаючи конкретні значення цін перелічених товарів і величину доходу M , можна приблизно визначити, скільки товару a знадобиться в майбутньому. У цьому зацікавлений підприємець, який виробляє товар a .

Три соціальні групи населення купують товар a . Визначено індивідуальні функції попиту в кожній групі

- 1) $y_a = 17x_a^{-0,3}x_b^{0,2}x_c^{-0,1}M^{0,2};$
- 2) $y_a = 16x_a^{-0,2}x_c^{-0,3}x_d^{0,4}M^{0,1};$
- 3) $y_a = 19x_a^{-0,4}x_d^{0,3}x_e^{-0,2}M^{0,3}.$

Кількість покупців у кожній групі становить 100, 200 та 50 осіб відповідно. Зміна цін на товари b , c , d та e не передбачається. Отже, попит на них не вплине на попит на товар a . Дохід населення за групами 1), 2) та 3) збільшиться на 1%, 2% та 1%. Підприємець, який випускає товар a , збільшить обсяг випуску на 5,5%. Чому?

Практичне заняття №6.

Тема: Системи масового обслуговування.

Питання за темою:

1. Фізичні системи масового обслуговування та проблеми їх моделювання.
2. Математичні моделі систем масового обслуговування (СМО) та їх особливості.
3. Основні показники роботи СМО та їх визначення.
4. СМО як динамічні системи:
 - поняття події;
 - логіка функціонування системи;
 - збір статистичних даних про те, що відбувається в СМО.

VI заняття

Розглядається така фізична система масового обслуговування. 6 однотипних верстатів, що працюють у механічному цеху підприємства, обслуговує один механік. Робота механіка полягає в тому, що він усуває несправності, якщо верстати виходять із ладу. Несправності з'являються випадковим чином, незалежно від будь-яких зовнішніх факторів. Інтенсивність збою роботи — одна поломка на годину. Тривалість огляду та усунення несправності становить 6 хвилин. Ставиться питання: механік забезпечує ефективну роботу верстатів чи ні?

Математично це однофазова одноканальна система масового обслуговування. Заявки — це поломки верстатів, обслуговування — це усунення поломок. Поломки усуває один механік, незалежно від характеру самої несправності. Вхідний потік заявок стаціонарний, що не залежить від жодних зовнішніх факторів. Кількість верстатів, які підлягають обслуговуванню, не змінюється, тому система розглядається як система зі скінченною кількістю станів.

Необхідно визначити:

- коефіцієнт простою механіка λ_1 ;
- коефіцієнт простою верстата в черзі λ_2 ;
- коефіцієнт перебування верстата в системі обслуговування λ_3 ;
- середній час перебування в черзі в очікуванні на обслуговування $t_{ож}$.

Дано:

- інтенсивність надходження заявок $\lambda = 1$;
- інтенсивність обслуговування $\mu = 10$;
- максимальна кількість станів $m = 6(k = \overline{0,6})$;

Коефіцієнт завантаження системи

$$q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Визначаються ймовірності перебування в будь-якому з k можливих станів.

Усі верстати працюють, механік простоює, стан P_0

$$P_0 = \frac{1}{1 + 6 \left(\frac{0,1^1}{5!} + \frac{0,1^2}{4!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{2!} + \frac{0,1^5}{1!} + \frac{0,1^6}{0!} \right)} = \frac{1}{2,0632} = 0,4840$$

Один станок зламався, його обслуговує механік

$$P_1 = (6 - 1 + 1) \cdot 0,1 \cdot 0,4840 = 0,2900$$

Стан, що зламався ще один верстат і механік зайнятий ремонтом іншого верстата, оцінюється імовірно P_2

$$P_2 = (6 - 2 + 1) \cdot 0,1 \cdot 0,2900 = 0,1450$$

Аналогічно можна розрахувати ймовірності решти станів

$$P_3 = 0,0580;$$

$$P_4 = 0,0170;$$

$$P_5 = 0,0037;$$

$$P_6 = 0,0003.$$

Виходячи з аналітичних формул розрахунку показників однофазової одноканальної системи, маємо:

Середня довжина черги:

$$\bar{U} = (2 - 1) \cdot 0,1450 + (3 - 1) \cdot 0,0580 + (4 - 1) \cdot 0,0170 + (5 - 1) \cdot 0,0037 + (6 - 1) \cdot 0,0003 = 0,3260$$

Середнє число заявок в системі обслуговування:

$$\bar{k} = 1 \cdot 0,2900 + 2 \cdot 0,1450 + 3 \cdot 0,0580 + 4 \cdot 0,01707 + 5 \cdot 0,0037 + 6 \cdot 0,0003 = 0,8450$$

Середній час очікування в черзі:

$$t_{ож} = \frac{0,3260}{1(6 - 0,8450)} = 0,06 \approx 3,6 \text{ хвилин.}$$

Коефіцієнт простою верстата в черзі:

$$\lambda_1 = \frac{0,3260}{6} \cdot 100 = 5,4\%$$

Коефіцієнт простою верстата з урахуванням ремонту:

$$\lambda_2 = \frac{0,8450}{6} \cdot 100 = 14\%$$

Коефіцієнт простою механіка:

$$\lambda_3 = \bar{Z} \cdot 100 = 0,4850 \cdot 100 = 48\%$$

Механік майже половину часу не працює. Але, при цьому, верстати досить багато простоюють — 14% часу. Що вигідніше: брати ще одного механіка чи задовольнитися тим станом, що є?

Практичне заняття №7.

Тема: Матричні балансові моделі.

Питання за темою:

1. Виробничі об'єднання та їхні проблеми
2. Звітні та прогнозні балансові моделі. Їхня структура
3. Основні балансові рівняння.
4. Прямі матеріальні витрати та алгоритмічні балансові рівняння
5. Розрахунок показників прогнозованої балансової моделі

VII заняття

Скласти прогнозну балансову модель на наступний плановий період. Для цього використовується звітна модель. Передбачається, що прямі матеріальні витрати не змінилися. Звітна модель представляється:

	Споживачі (j)			Продукція	
				Кінцева (y_i)	Валова (x_i)
Виробники (i)	1	2	3		
1	32	10	12	66	120
2	20	12	8	40	80
3	24	8	14	44	90
m_j	8,8	10	11,2	150	-
v_j	35,2	40	44,8		-
Валова продукція (x_j)	120	80	90	-	290

Основне балансове рівняння по відношенню до виробників записується так:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij} + y_i; i = \overline{1,3}.$$

Валова продукція виробника складається з того, скільки засобів виробництва (що називаються матеріальними потоками) вироблено всім споживачам об'єднання (x_{ij}) і скільки готової продукції пішло на продаж (що називається кінцевою продукцією) y_i .

Для прогнозування використовується інший вид балансового рівняння, а саме:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + y_i; i = \overline{1,3},$$

- де a_{ij} прямі матеріальні затрати, які показують величину затрат i -го виробника на одиницю продукції j -го об'єкту, як споживача. Формально:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}.$$

Користуючись звітною балансовою моделлю, визначимо прямі матеріальні витрати:

$$\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,13 & 0,13 \\ 0,17 & 0,15 & 0,09 \\ 0,20 & 0,10 & 0,16 \end{pmatrix}, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}.$$

Об'єднання вважає, що на наступний прогнозний період слід випускати іншу кількість кінцевої продукції, тобто $y_i = 80; 40; 30$.

Балансові рівняння складемо в числовому вираженні:

$$\begin{cases} x_1 = 0,27x_1 + 0,13x_2 + 0,13x_3 + 80 \\ x_2 = 0,17x_1 + 0,15x_2 + 0,09x_3 + 40 \\ x_3 = 0,20x_1 + 0,10x_2 + 0,16x_3 + 30 \end{cases}$$

Наведемо до вигляду, зручного для розв'язання системи лінійних рівнянь по відношенню к x_i – величині валової продукції на наступний плановий період ($i = \overline{1,3}$).

$$\begin{cases} (1 - 0,27)x_1 - 0,13x_2 - 0,13x_3 = 80 \\ -0,17x_1 + (1 - 0,15)x_2 - 0,09x_3 = 40 \\ -0,20x_1 - 0,10x_2 + (1 - 0,16)x_3 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,73x_1 - 0,13x_2 - 0,13x_3 = 80 \\ -0,17x_1 + 0,85x_2 - 0,09x_3 = 40 \\ -0,20x_1 - 0,10x_2 + 0,84x_3 = 30 \end{cases}$$

Використовуючи перетворення Жордана-Гаусса, визначимо значення

$$x_i (i = \overline{1,3}) .$$

$$\begin{pmatrix} 0,73 & -0,13 & -0,13 & 80 \\ -0,17 & 0,85 & -0,09 & 40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,84 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0,18 & -0,18 & 109,6 \\ 0 & 0,82 & -0,12 & 58,6 \\ 0 & -0,14 & 0,80 & 51,9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,21 & 122,5 \\ 0 & 1 & -0,15 & 71,5 \\ 0 & 0 & 0,79 & 61,9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 138,9 \\ 0 & 1 & 0 & 83,2 \\ 0 & 0 & 1 & 78,4 \end{pmatrix}$$

Валова продукція на наступний плановий період дорівнює відповідно

$$x_i = 139; 83; 78.$$

Виходячи з виразу прямих матеріальних витрат, визначаються матеріальні потоки:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j;$$

$$x_{11} = 0,27 \cdot 139 = 37,5; x_{12} = 0,13 \cdot 83 = 10,8; x_{13} = 0,13 \cdot 78 = 10,1;$$

$$x_{21} = 0,17 \cdot 139 = 23,6; x_{22} = 0,15 \cdot 83 = 12,4; x_{23} = 0,09 \cdot 78 = 7,0;$$

$$x_{31} = 0,20 \cdot 139 = 27,8; x_{32} = 0,10 \cdot 83 = 8,3; x_{33} = 0,16 \cdot 78 = 12,5;$$

Баланс за стовпцями або баланс за споживанням визначається так:

$$x_j = \sum_{i=1}^3 x_{ij} + m_j + v_j, i = \overline{1,3}.$$

Звідси:

$$m_j + v_j = x_j - \sum_{i=1}^3 x_{ij}, j = \overline{1,3}.$$

$(m_j + v_j)$ називається чиста продукція, де m_j – заробітна плата та v_j – кошти, що йдуть на розвиток, m_j та v_j розподіляються у відсотковому співвідношенні як 20:80.

$$m_1 + v_1 = 139 - 89 = 50; m_1 = 10; v_1 = 40;$$

$$m_2 + v_2 = 83 - 32 = 51; m_2 = 10,2; v_2 = 40,8$$

$$m_3 + v_3 = 78 - 30 = 48; m_3 = 9,6; v_3 = 38,4;$$

Прогнозна балансова модель

Виробники (i)	Споживачі (j)			Продукція	
	1	2	3	Кінцева(y_i)	Валова(x_i)
1	37,5	10,8	10,1	80	139
2	23,6	12,4	7,0	40	83
3	27,8	8,3	12,5	30	78
m_j	10,0	10,2	9,6	150	-
v_j	40,0	40,8	38,4		-

Валова продукція (x_j)	139	83	78	-	300
-------------------------------	-----	----	----	---	-----

Перерозподіл виробництва кінцевої продукції за виробниками дає нові обсяги кінцевої продукції, нові матеріальні потоки, і загальний дохід об'єднання збільшиться: було 290, стало 300 грошових одиниць.

Домашнє завдання

I заняття

1. Як організувати збір фактичних значень факторів, якщо необхідне прогнозування у часі?
2. Що таке просторовий ряд і коли він використовується?
3. Як визначити наявність кореляційно-функціональної залежності двох факторів?
4. Що означає визначення аналітичного вигляду функціональної залежності на основі вибірки?
5. Висунення та перевірка гіпотези про можливість виключення з розгляду незалежного фактора.
6. Перевірка гіпотези про виключення малозначущого незалежного фактора з математичної моделі.
7. Алгоритм формування представничої вибірки як просторового ряду.
8. Алгоритм формування представничої вибірки як часового ряду.
9. Алгоритм вибору залежного фактора за наявності альтернатив.
10. Визначення динаміки зміни фактора у вигляді кореляційної функції.
11. Визначення кризового стану підприємства на основі динаміки доходів і витрат.
12. Прогнозування значення залежного показника від незалежних за допомогою часового ряду фактичних значень факторів.

II заняття

1. Визначити аналітичний вигляд лінійної залежності попиту від ціни та пропозиції від тієї самої ціни.
2. На основі отриманих ліній регресії визначити, при якій ціні весь товар буде реалізовано. Вихідні дані наведені в таблиці.

1				2			3			4			5			6		
№ п/ п	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	8,0	10,0	10,0	7,0	12,0	13,0	6,0	10,0	11,0	5,0	10,0	11,0	4,0	8,0	10,0	3,0	10,0	11,0
2	8,1	9,8	10,2	7,1	11,5	13,0	6,0	10,0	11,0	5,0	10,0	11,0	4,0	8,0	10,0	3,0	10,0	11,0
3	8,2	9,6	10,4	7,2	11,0	13,5	6,1	9,8	11,2	5,1	9,9	11,0	4,1	8,0	10,5	3,1	10,0	11,2
4	8,3	9,4	10,6	7,2	10,5	13,5	6,1	9,8	11,4	5,1	9,9	11,1	4,1	7,8	10,5	3,1	9,8	11,2
5	8,4	9,2	10,8	7,4	10,5	13,5	6,2	9,8	11,6	5,1	9,9	11,1	4,1	7,8	10,5	3,2	9,8	11,4
6	8,5	9,0	10,8	7,6	9,0	14,0	6,3	9,6	11,6	5,2	9,9	11,2	4,2	7,8	10,8	3,2	9,7	11,4
7	8,6	8,8	10,8	7,6	9,0	14,0	6,4	9,6	11,6	5,2	9,8	11,3	4,3	7,6	10,8	3,2	9,7	11,4
8	8,7	8,6	11,0	7,8	9,0	14,5	6,5	9,4	11,8	5,3	9,8	11,4	4,4	7,4	10,8	3,4	9,6	11,6
9	8,8	8,4	11,2	8,0	8,5	14,5	6,5	9,2	11,8	5,4	9,7	11,4	4,5	7,2	11,0	3,4	9,6	11,8
10	8,9	8,2	11,4	8,2	8,0	15,0	6,6	9,2	12,0	5,5	9,6	11,5	4,6	7,0	11,0	3,5	9,4	11,8

x – ціна; y – попит; z – пропозиція.

III заняття

1. Перевірити на достовірність лінію регресії, отриману на основі вибірки.
2. Пояснити рівень корельованості сукупності розглянутих факторів.

Вибірка, лінія регресії та коефіцієнт множинної кореляції наведені в таблиці.

1				2			3			4		
№ п/ п	y	x ₁	x ₂	y	x ₁	x ₂	y	x ₁	x ₂	y	x ₁	x ₂
1	1,0 1	1, 0	1, 2	380	12	3	800	3 5	8	800	8	5 0
2	0,9 3	1, 0	1, 4	387	15	2	700	3 0	6	700	6	3 0
3	0,8 4	1, 0	1, 6	389	17	3	500	2 5	1 0	500	1 0	2 0
4	1,1 5	1, 2	1, 2	401	11	5	900	4 0	6	900	6	4 0
5	1,0 9	1, 2	1, 4	394	14	5	1000	2 5	1 2	1000	1 2	6 0
6	1,0 5	1, 2	1, 6	394	12	4	600	3 6	6	600	6	3 0
7	1,3 2	1, 4	1, 2	395	16	3	700	3 2	1 0	700	1 0	6 0
8	1,2 9	1, 4	1, 4	391	13	5	1300	3 0	8	1300	8	8 0
9	1,2 6	1, 4	1, 6	404	10	6	1200	2 5	1 2	1200	1 2	5 0
10	-	-	-	395	13	4	800	3 0	7	800	7	4 0
11	-	-	-	-	-	-	700	4 0	6	700	6	4 3
12	-	-	-	-	-	-	1000	4 5	1 0	1000	1 0	6 0

1. $y = 0,399 + 0,908x_1 - 0,275x_2; R = 0,992.$
2. $y = 369,259 + 0,426x_1 + 4,518x_2; R = 0,737.$
3. $y = 303,636 + 4,741x_1 + 46,466x_2; R = 0,402.$
4. $y = 265,639 + 14,264x_1 + 9,724x_2; R = 0,810.$

IV заняття

1. Сформувати тестову вибірку даних для визначення аналітичного вигляду функції Кобба-Дугласа.
2. Записати формальний вигляд функції Кобба-Дугласа як лінійну та степеневу функцію.
3. Дано аналітичний вигляд функції Кобба-Дугласа. Визначити:
 - ефективність роботи підприємства;
 - трудомістке чи матеріаломістке виробництво;
 - величину фондівддачі;
 - продуктивність праці;
 - еластичність обсягу випуску за матеріальними та трудовими витратами;
 - визначити коефіцієнт замінюваності незалежних факторів;
 - показати, що показники ступеня є коефіцієнтами еластичності при степеневому вигляді функції.

Варіанти аналітичного вигляду функцій наступні:

1	2	3	4
$y = 16x_1^{0,7} x_2^{0,6}$	$y = 20x_1^{0,5} x_2^{0,6}$	$y = 14x_1^{0,4} x_2^{0,5}$	$y = 100x_1^{0,4} x_2^{0,6}$
5	6	7	8
$y = 35x_1^{0,8} x_2^{0,4}$	$y = 15x_1^{0,6} x_2^{0,7}$	$y = 90x_1^{0,7} x_2^{0,5}$	$y = 45x_1^{0,4} x_2^{0,7}$

V заняття

1. Виходячи з функції попиту, типу $y = ax^\lambda$, визначити:

- зміна величини попиту на товар;
- зміна величини доходу підприємця.
- Провести дослідження при збільшенні ціни на один, два та три відсотки.

2. Виходячи з функції попиту, типу $y = bM^\beta$, Визначити тенденцію зміни попиту на товар, якщо доходи населення будуть зростати.

3. Виходячи з індивідуальної функції попиту, типу $y_a = f(x_a, x_b, \dots, x_k, M)$, визначити

- буде зростати чи ні попит на товар a , якщо ціна супутніх товарів не зміниться або збільшиться чи зменшиться
- буде зростати попит на товар a , якщо доходи населення збільшуватися на 10 відсотків, а ціна не зміниться;
- кількість необхідного товару a за якоїсь однієї ситуації.

Варіанти аналітичного вигляду комерційних функцій відповідно до їх типу:

Тип	$y = ax^\lambda$			$y = bM^\beta$				$y_a = f(x_a, x_b, \dots, x_k, M)$
№ п/п	a	початкове x	λ	b	M	B	$[p, q]$	
1	100	50	-0,5	10	1000	10	[900,1300]	$y_a = 17x_a^{-0,3}x_b^{0,2}x_c^{-0,1}M^{0,2}$
2	90	40	-0,4	9	1100	9	[900,1100]	$y_a = 16x_a^{-0,2}x_c^{-0,3}x_d^{0,4}M^{0,1}$
3	80	30	-0,3	8	1200	10	[900,1100]	$y_a = 19x_a^{-0,4}x_d^{0,3}x_e^{-0,2}M^{0,3}$

4	70	50	-0, 5	7	100 0	9	[1100,1300]	$y_a = 18x_a^{-0,3}x_b^{-0,1}x_d^{0,2}M^{0,2}$
5	60	40	-0, 4	6	110 0	9	[1100,1300]	$y_a = 20x_a^{-0,2}x_c^{0,3}x_e^{0,2}M^{0,1}$
6	50	30	-0, 3	5	120 0	1 0	[1100,1300]	$y_a = 17x_a^{-0,4}x_d^{-0,2}x_c^{0,3}M^{0,3}$

Для підрахунку кількості необхідного товару a вважати:

$$x_a = 10; x_b = 15; x_c = 10; x_d = 15; x_e = 10; M = 1000.$$

VI заняття

Початкові дані для дослідження СМО

№ п/ п	Кількість верстатів	λ	μ
1	5	1	6
2	4	2	8
3	5	3	7
4	4	1	6
5	5	2	8
6	4	3	7
7	5	1	6
8	4	2	8

VII заняття

Звітна балансова модель

Виробництво	Споживання			Продукція	
	1	2	3	кінцева	валова
1	32	10	12	66	120
2	20	12	8	40	80
3	24	8	14	44	90
m_j	8,8	10	11,2	150	-
V_j	35,2	40	44,8		-
Валова продукція	120	80	90	-	290

Прогнозні значення кінцевої продукції

№ п/п варіанта U_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	70	60	65	60	50	60	50	60	50	65
y_2	40	50	45	50	50	40	40	45	50	55
y_3	50	50	40	40	50	45	50	45	40	45

Варіанти завдань для самостійної роботи

завдання варіанти	1	2	3	4	5	6	7
1	1,7	2	1	8	2	1	1 0
2	2,8	4	2	7	4	3	9
3	3,9	6	3	6	6	5	8
4	4,1	1	4	5	1	7	7
5	5,1 1	3	2	4	3	2	6
6	6,1 2	5	3	3	5	4	5
7	2,7	4	4	2	1	6	4
8	3,8	6	1	1	3	8	3
9	4,9	2	3	2	5	1	2
10	5,1	3	4	3	2	2	1
11	6,1 1	5	1	4	4	3	3
12	3,1 2	1	2	5	6	4	5
13	4,7	2	4	6	1	5	7
14	5,9	3	2	7	2	6	9
15	6,1 1	4	3	8	3	7	1

Формули до кореляційно-регресивному аналізу та його додатків

Вибірка

Фактичні значення факторів						
Залежні	Незалежні					
y	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m
y_1	x_1^1	x_2^1	...	x_k^1	...	x_m^1
y_2	x_1^2	x_2^2	...	x_k^2	...	x_m^2
...	...	...	...	...	...	...
y_i	x_1^i	x_2^i	...	x_k^i	...	x_m^i
...	...	...	...	...	...	...
y_n	x_1^n	x_2^n	...	x_k^n	...	x_m^n

n – обсяг вибірки; m – кількість незалежних факторів.

Види залежності:

– одномірні функції:

$$y = ax + b ; y = a_0 x^\lambda .$$

– багатомірні функції:

$$y = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + a_0 ; y = a_0 x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_m} .$$

Коефіцієнти кореляції:

– парної кореляції:

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} .$$

– множинної кореляції:

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_y}} ,$$

- де D – визначник кореляційної матриці незалежних факторів, D_y – визначник з урахуванням парної кореляції залежної змінної з кожною незалежною.

$$D = \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & r_{x_mx_m} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_m} \\ 1 & r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_m} \\ 1 & r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & r_{x_mx_m} \end{vmatrix}$$

Система нормальних рівнянь для $m = 1$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

Коефіцієнт Фішера F

$$F = S_{\hat{y}}^2 / S_{\hat{y}/x}^2,$$

$$- \text{де } S_{\hat{y}}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / n;$$

$$S_{\hat{y}/x}^2 = \sum_{i=1}^n (y_{i\phi} - y_{ir}) / (n - m - 1);$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n;$$

y_{ir} – розрахункові значення, отримані відповідно до лінії регресії.

У разі необхідності визначення динаміки зміни певного показника будується лінія регресії виду $y = f(t)$,

- де $t=1,2,\dots$

Виробнича функція, що подається як функціональна залежність між витратами U_{ij} та випуском продукції y_i :

$$y_i = f(U_{ij}), j = \overline{1, l},$$

- де l витрачених для випуску i -го виду продукції.

Величина $\partial y_i / \partial U_{ij}$ показує приріст випуску продукції при прирості витрат.

Величина $\frac{y_i}{U_{ij}}$ – середня віддача показує, скільки випуску отримуємо з одиниці витрат.

Норма заміщення ресурсів визначається як:

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial U_{ij+1}} \bigg/ \frac{\partial y_i}{\partial U_{ij}}.$$

Еластичність показує, як змінити випуск у відсотковому співвідношенні, якщо на 1% збільшимо витрати конкретного ресурсу.

$$E_{yi} = \frac{\partial y_i}{\partial U_{ij}} \cdot \frac{U_{ij}}{y_i}, j = \overline{1, l}.$$

Комерційна функція попиту, що показує залежність попиту від ціни:

$$y = f(x) = ax^\lambda,$$

– де y – попит; x – ціна;

Використовується з метою визначення, чи можна збільшити ціну товару, чи ні.

Якщо $(x + 0,01x)(y - \lambda y) \approx yx$, то ціну можна підвищити.

Комерційна функція попиту, що показує залежність попиту доходу M :

$$y = f(M) = a_1 x^\beta.$$

Якщо $\partial y / \partial M > 0$, то товар є вищою категорією у сенсі попиту, а якщо $\partial y / \partial M < 0$, то товар переходить в нижчу категорію, і при значному зростанні доходу попит зменшується.

Індивідуальна функція попиту враховує ціну відповідних товарів:

$$y_a = f(x_a, x_b, \dots, x_k, M) = a_2 x_a^{\alpha_a} x_b^{\alpha_b} \dots x_k^{\alpha_k} M^{\alpha_M};$$

$$E_{y_a x_a} = \alpha_a \quad E_{y_a x_i} = \alpha_i, \quad i = \overline{b, k}; \quad E_{y_a M} = \alpha_M;$$

Якщо $\alpha_i > 0$, то товари a і i взаємодоповнювані.

Якщо $\alpha_i < 0$, то товари a і i взаємозамінні.

Якщо $\alpha_i = 0$, то зміна ціни на товар i не впливає на величину попиту на товар a .

Прогнозне значення $\overline{y_a} = \sum_{l=1}^P \overline{y_a^l} \cdot n_l$, де n_l - кількість споживачів товару a с

доходом M_l и $\overline{y_a^l}$ прогнозне значення попиту в l -ой соціальній групі $(l = \overline{1, p})$.

Формули до систем масового обслуговування (СМО)

Коефіцієнт загрузки СМО:

$$q = \lambda / \mu ,$$

де λ и μ - інтенсивність надходження заявок та їх обслуговування відповідно.

m – максимальна кількість заявок в СМО ($k = \overline{1, m}$);

Ймовірності перебування СМО у певному стані:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^m \frac{m! q^k}{(m-k)!}} ;$$

$$P_k = (m - k + 1) q P_{k-1} ;$$

Середня довжина черги:

$$\bar{v} = \sum_{k=2}^m k P_k .$$

Середнє число вимог в СМО:

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^m k P_k .$$

Наявність простою каналу обслуговування:

$$\bar{z} = P_0 .$$

Середній час перебування заявки в черзі (в долях):

$$\bar{t}_{om} = \frac{\bar{j}}{\lambda (m - \bar{k})} .$$

Коефіцієнт простою заявок в черзі (%):

$$\lambda_1 = \frac{\bar{v}}{m} \cdot 100 .$$

Коефіцієнт знаходження заявок в СМО (%):

$$\lambda_2 = \frac{\bar{k}}{m} \cdot 100$$

Коефіцієнт простою каналу обслуговування (%):

$$\lambda_3 = \bar{z} \cdot 100$$

Формули до матрично-балансовим моделям

x_i и x_j - валовий продукт з позиції виробника та споживача відповідно
 $(i, j = \overline{1, n})$

x_{ij} - матеріальні потоки між членами виробничого об'єднання.

y_i и $(m_j + v_j)$ - кінцева та чиста продукція відповідно.

a_{ij} - прямі матеріальні витрати.

Основні балансові рівняння:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, i = \overline{1, n};$$

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + (m_j + v_j), j = \overline{1, n};$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, i, j = \overline{1, n};$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, i = \overline{1, n};$$

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, i, j = \overline{1, n}.$$

Коефіцієнт Фішера розраховується в таблиці по формулі:

$$E_m = \frac{n-k}{k-1} \cdot \frac{R}{1-R} ;$$

Рівень достовірності $q=0,99$.

де n – обсяг вибірки, k – число факторів (всього), R – коефіцієнт множинної кореляції.

Наприклад.

$$n=25; k=4; R=0,45;$$

$$\text{маємо } \frac{25-4}{3} \cdot \frac{0,45}{0,55} = \frac{21}{3} \cdot 0,82 = 5,73$$

Табличне значення $F_{3; 21; 0,99}=4,87$

Отримане значення 5,73

$$5,73 > 4,87$$

Табличне значення коефіцієнта Фішера $q=0,99$

Табличне значення коефіцієнта Фішера

m_2	m_1					
	1	2	3	4	5	6
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3
3	34,1	30,8	29,4	28,7	28,2	27,9
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63

Коефіцієнт Стюдента – t – відношення, $m=n-2$; достовірність q .

де n – обсяг вибірки.

Табличне значення коефіцієнта Стюдента

m	q			
	0,9	0,95	0,975	0,99
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485

Список літератури

1. Б.И. Юхименко. Эконометрия: Учебное пособие. – Одесса: “Феникс”, 2015. – 211с.
2. О.А. Корольев. Економетрія: навчальний посібник. – К.: Європейський ун-т, 2002. – 660с.
3. Н.Г. Медведев. Економетричні методи моделювання: Навчальний посібник. – К.: Європейський ун-т, 2003. – 140с.
4. Б.І. Юхименко. Економетрія: конспект лекцій. – Одеса: наука і техніка, 2005. – 52с.