## Demuestra la fórmula del volumen de la esfera de radio r como cuerpo de revolución generado por la circunferencia de radio r centrada en el origen al girar alrededor del eje de abcisas.

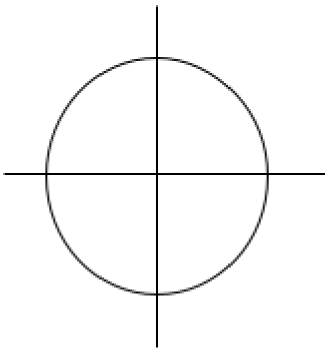
Sabemos que el volumen de una esfera se expresa con la siguiente fórmula:

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

A continuación demostraré esta fórmula, basándome en la fórmula del **volumen de revolución,** explicada en el siguiente video: [Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución]

$$\boxed{\int_a^b \pi f^2(x)\,dx}$$

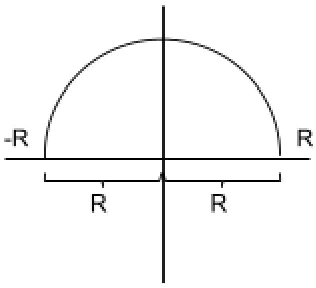
Primero vamos a deducir que función que determina una esfera.



La **ecuación de una circunferencia centrada en el origen** es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Pero este dibujo no representa una función, ya que para un determinado valor de x, existen dos valores diferentes de y. Por lo tanto la función se representaría así:




Esta ya sí sería una función, ya que para un determinado valor de x existe un solo valor de y.

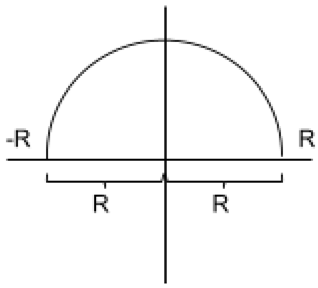
Para obtener la función que debemos aplicar en la fórmula del volumen de revolución solo debemos despejar la **ecuación de la circunferencia centrada en el origen:**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$\boxed{y = \sqrt{r^2 - x^2}}$$

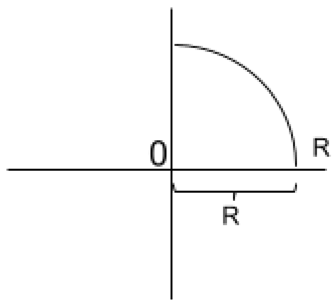
De esta función sólo cogeríamos el resultado positivo de la raíz cuadrada, ya que así solo habría una y posible para cada x, por lo tanto cumpliría la regla fundamental de las funciones.
Ahora ponemos la función en la fórmula del volumen de revolución, sustituyendo los valores de b y a de la integral. En este caso sería:



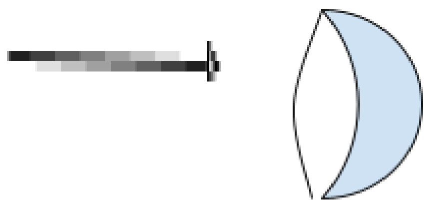

$$\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

$$\int_{-r}^{r} \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

Pero para que los cálculos sean más fáciles, en lugar de hacer la integral entre r y -r, la podemos hacer entre 0 y r, basándonos en este dibujo. Así podremos obtener media esfera que al multiplicarla por 2, obtendríamos la esfera completa.




Conseguiríamos esta media esfera.



$$2\int_0^r \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\int_0^r \pi(r^2 - x^2)dx$$

$$= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi[\int_0^r r^2 dx - \int_0^r x^2 dx]$$

$$= 2\pi[r^2 \int_0^r dx - \frac{x^3}{3}] = 2\pi[r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi[\left(r^2 r - \frac{r^3}{3}\right) - (0 - 0)] = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Y esta es la fórmula del volumen de una esfera.