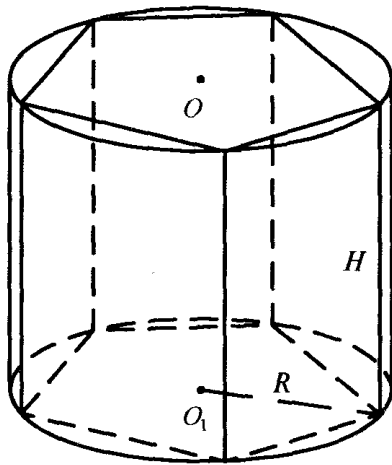


Комбінації геометричних тіл

Призма, вписана в циліндр і описана навколо нього

Означення 1. Призмою, вписаною у циліндр, називається така призма, у якої площинами основ є площини основ циліндра, а бічними ребрами — твірні циліндра.



Якою має бути призма, щоб її можна було вписати в циліндр?

Оскільки циліндр є прямим, то і призма має бути прямою, за означенням її ребра збігаються з твірними циліндра; основою призми має бути многокутник, який можна вписати в коло.

Отже, якщо призма є паралелепіпедом, то обов'язково прямокутним, якщо в основі призми лежить трапеція, то ця трапеція — рівнобічна.

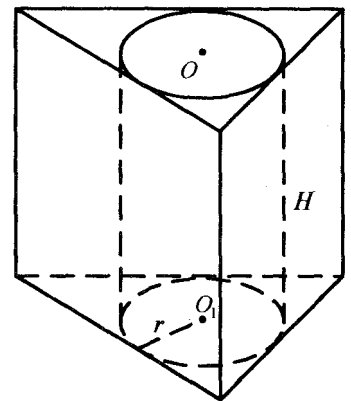
Радіус кола основи циліндра є радіусом кола,

описаного навколо многокутника основи призми.

Означення 2. Призмою, описаною навколо циліндра, називається призма, у якої площинами основ є площини основ циліндра, а бічні грані дотикаються до циліндра.

Якою має бути призма, щоб її можна було описати навколо циліндра?

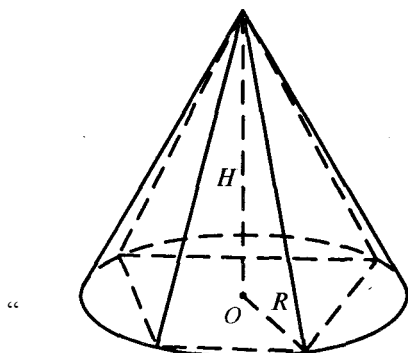
Призма має бути прямою, в її основі повинен лежати многокутник, у який можна вписати коло. Якщо це чотирикутник, то суми його протилежних сторін рівні. Якщо цей многокутник — паралелограм, то обов'язково — ромб. Радіус кола основи циліндра є радіусом кола, вписаного в основу призми.



Оскільки навколо довільного трикутника і будь-якого правильного многокутника можна описати коло і в будь-який трикутник та правильний многокутник можна вписати коло, то *будь-яку пряму трикутну і будь-яку правильну призму можна вписати в циліндр і описати навколо нього.*

Піраміда, вписана в конус і описана навколо нього

Означення 3. Пірамідою, вписаною в конус, називається така піраміда, основою якої є многокутник, вписаний у коло основи конуса, а вершиною — вершина конуса.

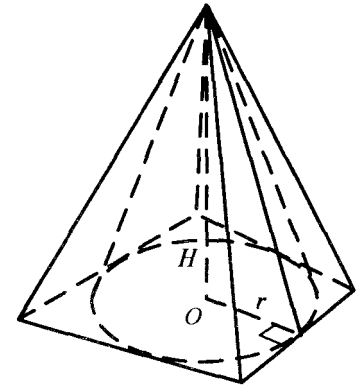


Бічні ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса, тому вони рівні. Висоти конуса і піраміди збігаються на основі єдиності прямої, перпендикулярної до площини і проведеної через точку, що не лежить у даній площині. Отже, вершина піраміди лежить на перпендикулярі,

проведеному через центр описаного навколо многокутника основи кола, тому всі бічні ребра рівні і утворюють з основою та висотою піраміди однакові кути.

Означення 4. Пірамідою, описаною навколо конуса, називається піраміда, в основі якої лежить многокутник, описаний навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса.

Площини бічних граней описаної піраміди є дотичними площинами до конуса, тому лінією дотику є пряма, якій належить висота бічної грані піраміди, що збігається з твірною конуса. Радіус вписаного в основу піраміди кола перпендикулярний до сторін многокутника, який лежить в основі піраміди і є проекцією твірної конуса на площину основи. *Всі бічні грані піраміди мають рівні висоти і утворюють з основою рівні двогранні кути.*



Отже, будь-яку правильну піраміду і піраміду з рівними ребрами та кутами, які бічні ребра утворюють з основою піраміди, можна вписати в конус.

Будь-яку правильну піраміду і піраміду з рівними двограними кутами при основі або рівними висотами бічних граней можна описати навколо конуса.

Розв'язування задач.

Задача 1. У циліндр вписано трикутну призму. $AC = 12$ см, $BC = 16$ см, висота призми дорівнює 10 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання

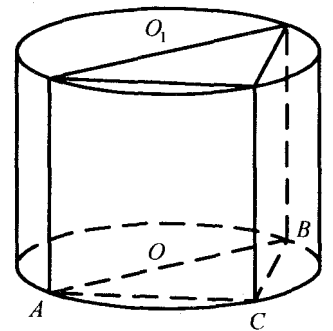
Призму вписано в циліндр, тому $\triangle ABC$ є вписаним у коло, центр якого за умовою лежить на стороні AB трикутника. Отже, $\triangle ABC$ — прямокутний, AB — його гіпотенуза, а радіус основи циліндра дорівнює радіусу

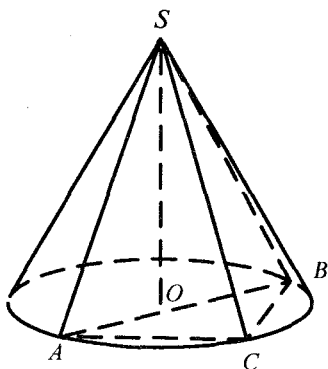
описаного навколо $\triangle ABC$ кола, тобто $\frac{1}{2} AB$. $AB = 20$ см, бо сторони даного трикутника пропорційні до сторін єгипетського трикутника. Тому радіус основи циліндра $R = 10$ см. Висота циліндра дорівнює висоті призми, тобто 10 см. Площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою $S_6 = 2\pi RH$.

Отже, $S_6 = 2\pi \cdot 10 \cdot 10 = 200\pi$ (см²).

Відповідь. $S_6 = 200\pi$ см².

Задача 2. Піраміду $SABC$ вписано в конус. Що можна сказати про вид трикутника ABC ? Назвати кути, які утворюють твірні з площиною основи конуса. Що можна сказати про міри цих кутів? Знайти радіус кола основи конуса, якщо $\angle ACB = \alpha$ і $AB = a$.





Розв'язання

Піраміду вписано в конус, основою O його висоти є центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола. Точка O (за умовою) лежить поза трикутником, тому $\triangle ABC$ тупокутний, $\angle ACB$ — тупий. $SO \perp (ABC)$. OC є проекцією SC на площину ABC , тому кут, який утворює твірна SC з основою, є $\angle SCO$. Аналогічно твірні SA і SB утворюють з основою кути $\angle SAO$ і $\angle SBO$, всі ці кути рівні між собою.

Радіус основи конуса дорівнює радіусу кола, описаного навколо $\triangle ABC$, тобто

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} = \frac{a}{2 \sin \alpha} \quad \text{Відповідь.} \quad R = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Перегляньте відеоурок за посиланням нище:

<https://www.youtube.com/watch?v=NgWpPTy2FbU>

Домашнє завдання:

Задача 1. Усі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть що вона вписана в деякий конус.

Задача 2. В конусі радіус основи R і висота H . Знайдіть ребро вписаного у нього куба.