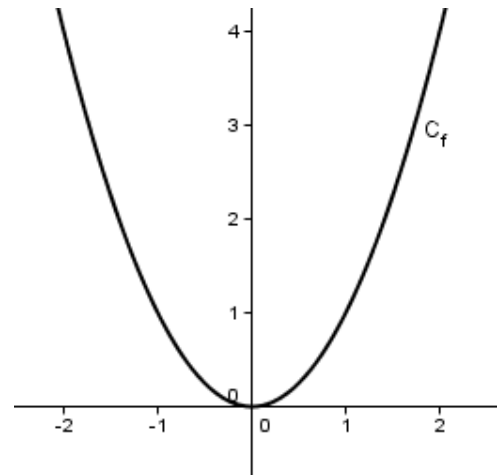


2.2 Κατακόρυφη οριζόντια μετατόπιση

ΘΕΜΑ Β

1. (21673) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση

C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\phi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω.

(Μονάδες 8)

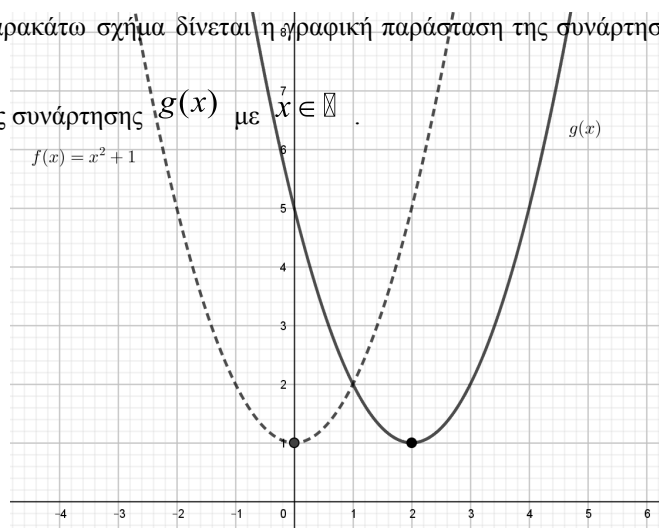
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\phi(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\phi(x)$.

(Μονάδες 9)

2. (20671) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η

γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.



α)(i) Είναι η f άρτια ή περιτή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

(ii) Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

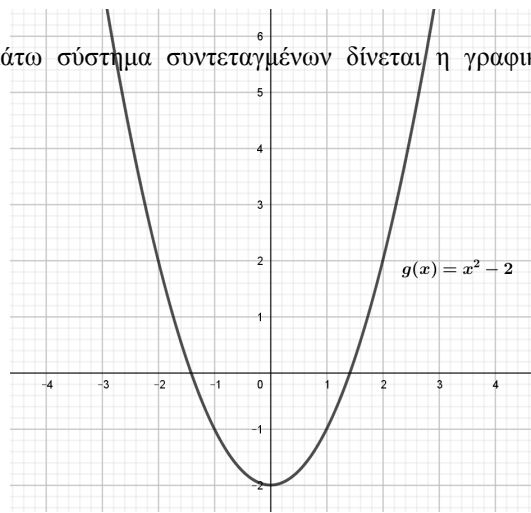
β) (i) Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;

(Μονάδες 7)

(ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(Μονάδες 4)

3. (15811) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

(i) να αιτιολογήσετε γιατί η \mathcal{G} είναι άρτια.

(Μονάδες 9)

(ii) να βρείτε το ελάχιστο της \mathcal{G} και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της \mathcal{G} που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(Μονάδες 9)

4. (14983) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(I) $f(x) = g(x + 3) + 1$. (II) $f(x) = g(x + 3) - 1$. (III) $f(x) = g(x - 3) + 1$.

(IV) $f(x) = g(x - 3) - 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

(Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 8)

5. (14972)

συνάρτηση

$$\varphi(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{με}$$

παράσταση που

σχήμα. Επιπλέον οι

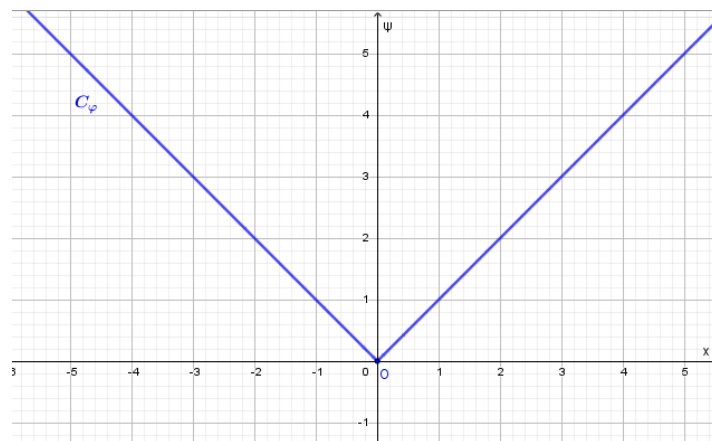
$$g(x) = |x - 2|, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) = |x - 2| + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται η

γραφική

φαίνεται στο

συναρτήσεις

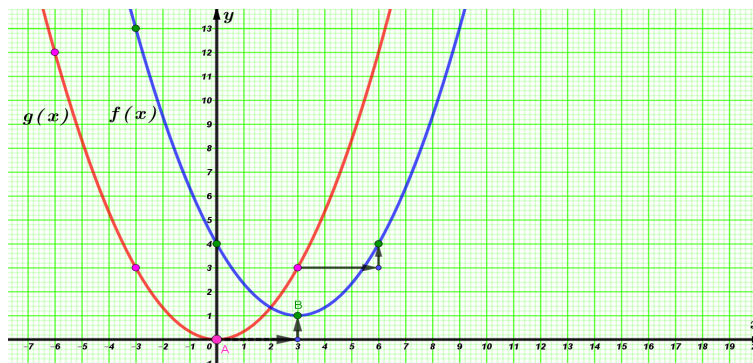


α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g , f και να εξηγήσετε πώς

προκύπτουν

κατάλληλα τη

παράσταση της φ .



μετατοπίζοντας

γραφική

(Μονάδες 13)

της γραφικής

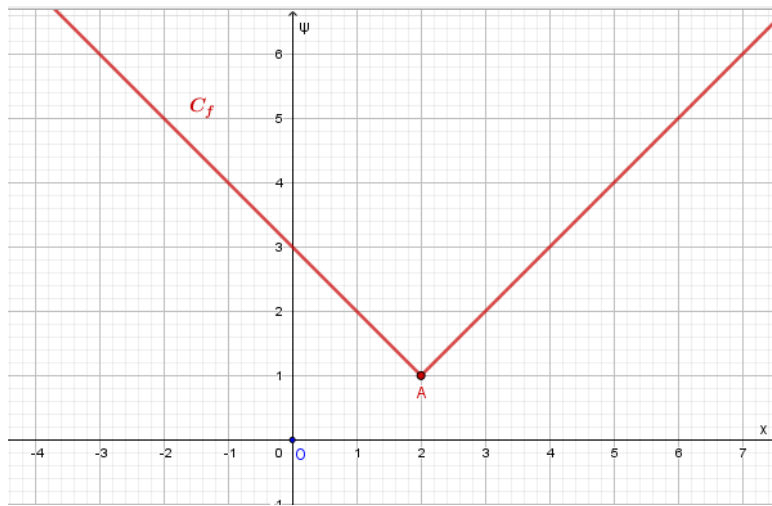
η οποία δίνεται

βρείτε:

β) Με τη βοήθεια

παράστασης της f ,

παρακάτω, να



(i) Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα. (Μονάδες 6)

(ii) Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 6)

6. (32674) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. (Μονάδες 10)

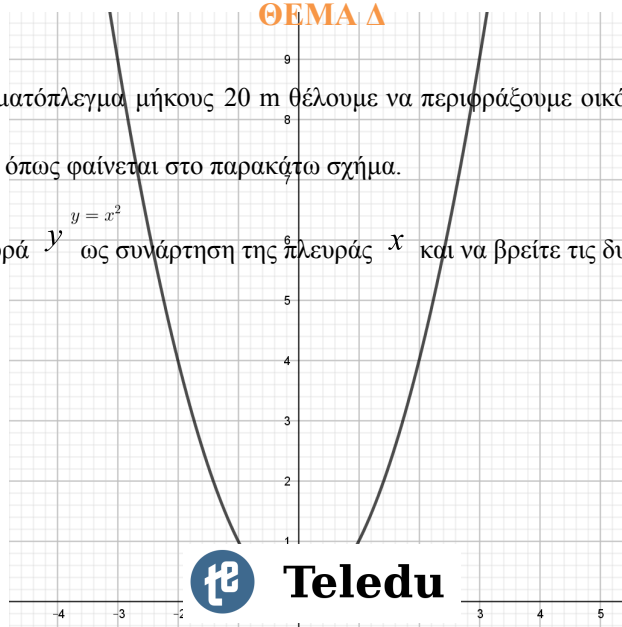
β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ

7. (20715) Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .

(Μονάδες 7)



β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = -(x-5)^2 + 25 \quad \text{και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.} \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

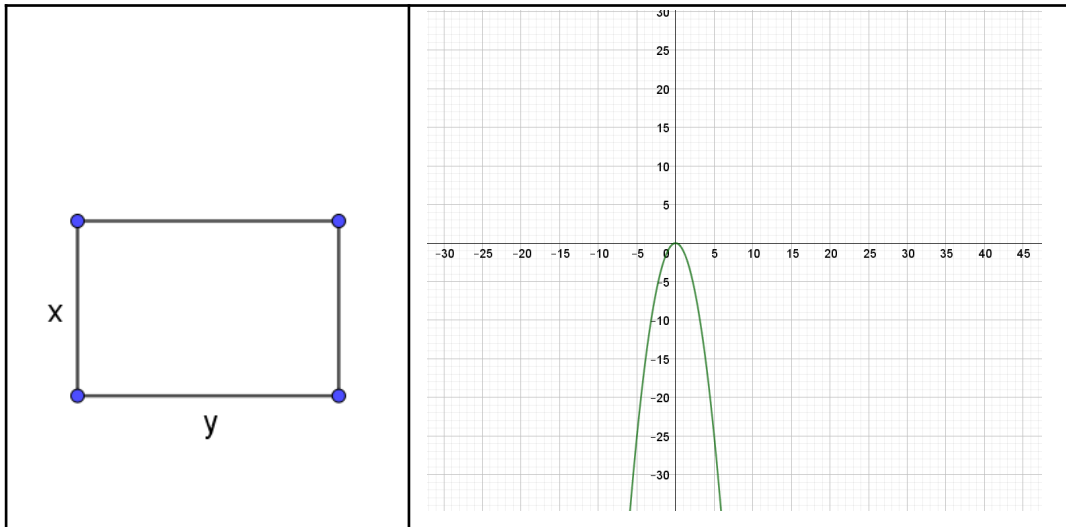
γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να

σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το

εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος

του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)



8. (20713) Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$, αντίστοιχα, ώστε $EB = Z\Gamma = H\Delta = \Theta A = x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο $EZH\Theta$.

α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = 2(x-1)^2 + 2 \quad \text{και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.} \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να

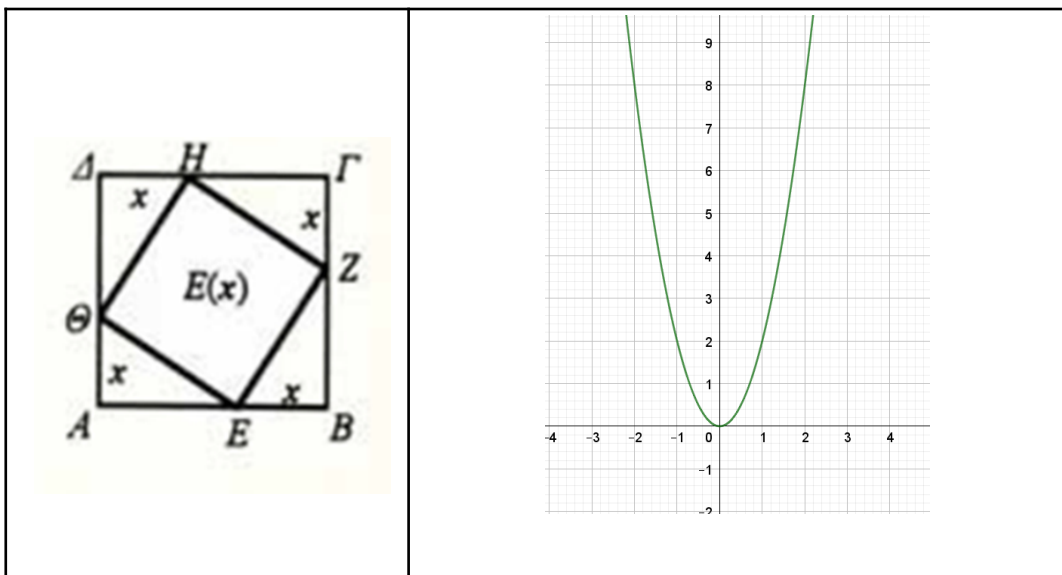
σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το

εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία E, Z, H, Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 5)



9. (14973) Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:

(i) Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f (Μονάδες 6)

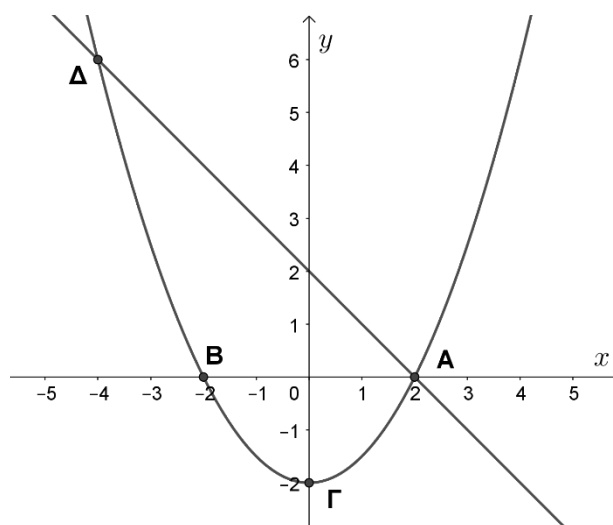
(ii) Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 4)

(iii) Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 7)

10. (14294) Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τις τιμές των α , β , γ .

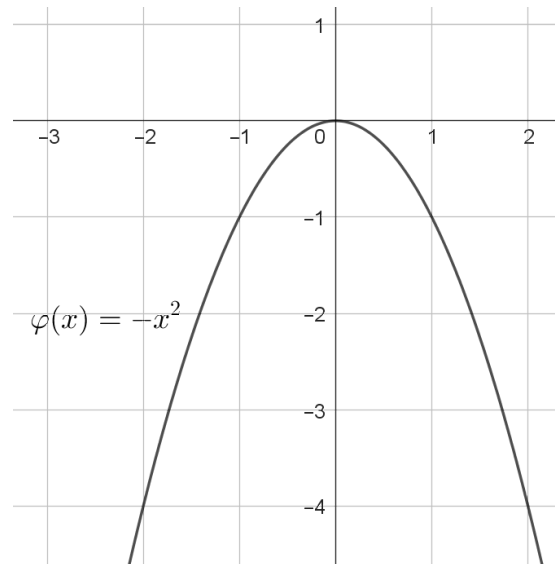
(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής. (Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4, 5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 9)

II. (32677) Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

- Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)
- Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)
- Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)