

RANGO DE UNA MATRIZ

Filas linealmente dependientes (l.d.) y linealmente independientes (l.i.)

- Dos filas son linealmente dependientes (l.d.) cuando son proporcionales.

Por ejemplo, $F_1 = (3 \ -2 \ 4 \ -1)$ y $F_2 = (-6 \ 4 \ -8 \ 2)$ son l.d.

- Dadas dos filas F_1 y F_2 de una matriz, una combinación lineal (c.l.) de ellas es otra fila F_3 de forma que $F_3 = aF_1 + bF_2$, siendo a, b números reales.

Por ejemplo, si $F_1 = (3 \ 2 \ 5 \ 7)$ y $F_2 = (4 \ 1 \ 3 \ 6)$ una c.l. de F_1 y F_2 es

$$F_3 = 4F_1 - 3F_2 = (12 \ 8 \ 20 \ 28) - (12 \ 3 \ 9 \ 18) = (0 \ 5 \ 11 \ 10)$$

- Tres o más filas son l.d. cuando una de ellas se puede poner como c.l. de las otras.

Por ejemplo, las filas F_1, F_2 y F_3 del ejemplo anterior son l.d. porque $F_3 = 4F_1 - 3F_2$.

Se puede generalizar a más de dos filas.

Cuando dos filas no son l.d. se dice que son linealmente independientes (l.i.)

Lo mismo podemos decir para las columnas.

Rango de una matriz

El rango de una matriz A es el número de filas o columnas l.i.

Se puede demostrar que, en cualquier matriz, el número de filas l.i. coincide con el número de columnas l.i. Luego, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t)$

Cuando dos matrices A y B tienen el mismo rango se dice que son equivalentes y se escribe $A \sim B$

Cálculo del rango de una matriz (método de Gauss)

Para calcular el rango de una matriz se pueden usar las siguientes reglas con las filas de la matriz y se obtiene una matriz con el mismo rango (las mismas reglas se pueden usar con las columnas):

- 1) Cambiar de orden dos filas
- 2) Eliminar una fila con todo ceros
- 3) Eliminar una fila que sea igual o proporcional a otra
- 4) Multiplicar o dividir una fila por un número distinto de cero
- 5) Sustituir una fila por una combinación lineal de esa fila con otra fila

Si la matriz es triangular o diagonal, el rango es el menor entre el n° de filas o columnas no nulas

Cálculo del rango por determinantes

El rango de una matriz A coincide con el orden de la mayor submatriz cuadrada contenida en A de determinante distinto de cero.

Una submatriz es la matriz que se obtiene al eliminar una o más filas (o columnas) de la matriz inicial.

Ten en cuenta que:

- Si A es una matriz cuadrada de orden 2 y $\det A \neq 0 \rightarrow \text{rang } A = 2$
- Si A es una matriz cuadrada de orden 3 y $\det A \neq 0 \rightarrow \text{rang } A = 3$

Actividades resueltas

Resuelve los siguientes apartados:

a) ¿Es posible que una matriz 3×4 tenga rango 4? Razona tu respuesta.

Resolución

No, porque como mucho puede tener 3 filas l.i., luego el rango como mucho es 3

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|M| = 2$. Calcula el rango de M^3 .

Resolución

Como $|M^3| = |M|^3 = 2^3 = 8 \neq 0$, el rango de M es 3

Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ - & 3 \end{pmatrix}$ Resolución El rango es 1 porque hay una sola fila

b) $\begin{pmatrix} 2 & - & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ Resolución Como el determinante es $2.4 - 3(-1) = 11 \neq 0$, el rango es 2

c) $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Resolución Como el determinante es $5.2 - 1.10 = 0$, el rango es 1

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & - & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución

Como el determinante es $1.2.0 + 0.1.4 + 3.2(-1) - 4.2(-1) - 3.0.0 - 2.1.1 = 0$
y, por ejemplo, $|1 \ 0 \ 3 \ 2| = 2 \neq 0$, el rango es 2

e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & - & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución

Como el determinante es $1.1.2 + 3.4.3 + 2.1(-2) - 3.1.2 - 3(-2)2 - 1.4.1 = 36 \neq 0$, el rango es 3

SISTEMAS Y MATRICES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales.

Por ejemplo, $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + 4z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$ es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Veamos cómo podemos expresar el sistema usando matrices: Consideremos las matrices:

matriz de los coeficientes, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & - & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 & - & 3 \end{pmatrix}$; columna de las incógnitas, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

columna de los términos independientes, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ - & 1 \end{pmatrix}$

Observa que

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & - & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 & - & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + 4z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

Por tanto, el sistema lo podemos expresar mediante la ecuación matricial $AX = b$

De forma general, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se puede escribir de la forma $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$, siendo x, y, z las incógnitas, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ los coeficientes y d, d', d'' los términos independientes

Podemos generalizar y hablar de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Aunque aquí sólo vamos a trabajar con sistemas de, como máximo, 3 ecuaciones y 3 incógnitas

Cuando hablemos de un sistema nos estamos refiriendo a un sistema de ecuaciones lineales

Matriz de un sistema

Es la matriz que se obtiene al añadirle a la matriz de coeficientes A , la columna de términos independientes, b . La representaremos por $A^* = (A \mid b)$.

La matriz del sistema también se llama matriz ampliada.

Por ejemplo, si el sistema es $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + 4z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$, la matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Observa que las ecuaciones del sistema se corresponden con las filas de la matriz

Clasificación de sistemas

Sólo existen tres tipos de sistemas de ecuaciones lineales en cuanto al número de soluciones:

{compatibles {determinados (SCD), tienen solución única indeterminados (SCI), tienen infinitas soluciones (SII)}

Discutir un sistema es clasificarlo y resolver un sistema consiste en encontrar el valor o valores de las incógnitas para que se cumplan todas las ecuaciones a la vez.

Observaciones:

- Si un sistema contiene una ecuación imposible del tipo $0 = n^\circ$ distinto de cero, entonces el sistema es incompatible. Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$ es incompatible.

- Si en un sistema hay dos ecuaciones en las que son proporcionales los coeficientes, pero no los términos independientes, entonces el sistema es incompatible. Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$ es incompatible

Teorema de Rouché-Fröbenius

Sea un sistema de m ecuaciones con n incógnitas y sea A la matriz de coeficientes y A^* la matriz ampliada, formada al adjuntar a la matriz A la columna de términos independientes.

En forma matricial sería $AX = b$, $A^* = (A \mid b)$, es la matriz del sistema.

- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = n^\circ$ de incógnitas, entonces el sistema es compatible determinado (SCD)

- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < n^\circ$ de incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado (SCI)

- Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A^*)$, entonces el sistema es incompatible (SI)

Como consecuencia de teorema, un sistema es homogéneo (el que tiene nulos todos los términos independientes, o sea $b = 0$) siempre es compatible pues $\text{rango}(A | b) = \text{rango } A$.

Además, si $\text{rango}(A) = n^\circ$ de incógnitas entonces la única solución es la trivial $x = 0, y = 0, z = 0$

Actividad resuelta

Clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones usando el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada o del sistema

$$A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 3 - 4 + 10 - 12 - 2 + 5 = 0$ y como el menor $|1 \ 1 \ 2 \ 3| = 1 \neq 0$, entonces $\text{rg } A = 2$

En A^* , como el menor $|1 \ 1 \ 0 \ 3 \ -1 \ 1 \ 5 \ 1 \ 2| = -2 + 5 - 1 - 6 = -8 \neq 0$, entonces $\text{rg } A^* = 3$

Luego, $\text{rg } A = 2 \neq \text{rg } A^* = 3$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución

$$\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ -10x + 4y = -12 \end{cases}$$

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$; matriz ampliada o del sistema

$$A^* = \begin{pmatrix} x & y & b \\ 5 & -2 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$\det A = 20 - 20 = 0$ y como A no es nula, entonces $\text{rg } A = 1$

En A^* , como $F_2 = (-2)F_1$, entonces $\text{rg } A^* = 1$

Luego, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada o del sistema

$$A^* = \begin{pmatrix} x & y & b \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A^* = -1 - 10 + 5 + 6 = 0$ y como el menor de A^* y de A , $|1 \ -2 \ 3 \ -1| = 5 \neq 0$, entonces $\text{rg } A^* = 2 = \text{rg } A$

Luego, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 = n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -6x + 2y - 4z = -2 \\ 9x - 3y + 6z = 3 \end{cases}$$

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$; matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & -4 & -2 \\ 9 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$F_2 = (-2)F_1$ y $F_3 = 3F_1$, tanto en A como en A^* . Y como son matrices no nulas, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 1$

Luego, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; matriz ampliada o del sistema

$$A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -28 - 25 + 3 + 30 - 2 + 35 = 13 \neq 0, \text{ entonces } \text{rg } A = 3$$

Y como A^* tiene sólo 3 filas y A^* contiene a A , entonces $\text{rg } A^* = 3$

Luego, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

$$\begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x + z = 2 + y \\ y = z \end{cases}$$

Resolución

Reordenando los términos queda el sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada o del sistema

$$A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 - 2 - 1 + 2 = 0 \text{ y como el menor de } A, |1 \ 1 \ 2 \ -1| = -3 \neq 0, \text{ entonces } \text{rg } A = 2$$

Como en A^* , $C_4 = C_1$ y $C_3 = -C_2$. Entonces, $A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como $|1 \ 1 \ 2 \ -1| = -3 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$

Luego, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

ANEXO: MÁS ACTIVIDADES

– Calcula el rango de las siguientes matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 6 & -3 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 4 & 2 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 4 & 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 2 & -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 5 & 5 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & -5 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 7 & -1 & -1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -1 & 1 & -3 & -3 & 2 & 4 & 0 & -6 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 6 & -1 & 2 & 8 & 3 & 8 & 7 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango con parámetros

– Halla a para que el rango de la matriz $M = (a + 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ a + 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ a + 1)$ sea igual a 3.

– Sabiendo que la matriz $A = (3 \ -2 \ 1 \ 1 \ -4 \ -2 \ -1 \ a \ -1 \ a)$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a ?

– Demostrar que, cualesquiera que sean los números reales a, b, c , las filas

$F_1 = (0, 1, c)$, $F_2 = (1, a, b)$ y $F_3 = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

– Calcula los valores de los parámetros a, b, c , para los cuales $\text{rang } A = 1$, donde

$A = (1 \ a \ 2 \ b \ -1 \ 1 \ -3 \ c)$

– Estudia el rango de las matrices según los valores de los parámetros

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & a \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & m & 7 & 8 \\ 2 & -1 & a & 2 & -a & 1 & 2 & a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & b & -1 & b & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 & 2 & a & 1 & -a & a & a & b & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & m & + & 1 & 0 & 1 & 1 & m & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & a & + & 1 & a & -1 & -2 & a & -1 & 0 & a & + & 3 \\ a & 0 & 0 & b & b & a & 0 & 0 & 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & a & 1 & -1 & b & -2 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

– Determina a, b y c sabiendo que la matriz $A = (-3 \ 1 \ 1 \ 1 \ a \ 2 \ -1 \ b \ c)$ verifica $A(1 \ 2 \ 3) = (2 \ 9 \ 4)$ y $\text{rango}(A) = 2$.

Clasificación

- Usando el teorema de Rouché-Fröbenius, clasifica los siguientes sistemas, sin resolverlos:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 0x = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 4y = -3 \\ 6x = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 5y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4(x - 2) = 1 + 2(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 7z = -10 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 6y + 4z = 12 \\ 3x - 9y + 6z = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y - 2z = -5 \\ 2x + 3y + 2z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - z = 4 \\ y + 3x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 3y - 3z = 0 \\ x + 5y + 11z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 8z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x + 18y - 10z = 0 \\ 7x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 10y - 6z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - 7z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -5x + 3y + 4z = 0 \\ 10x - 8y - 9z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - 6z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y - 10z = -11 \\ x - 3y - 2z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + 3z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2y + z = 4 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 2y + 2z = -6 \\ 6x - 3y - 3z = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - z = 4 \\ x - y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 5y + z = 17 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x - 6y + 2z = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 6 \\ -2x + 4y - z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 2z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ 5x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 3y + z = -14 \\ 5x - y - 2z = -15 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y + z = 8 \\ 3x - 5y + z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 4 \\ 5x - 5y + 4z = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 5 \\ x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \\ 5x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2x + y + 3z = 9 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = -4 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 3x + y + 3z = 4 \\ x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + y - 4z = 1 \\ 2x + 2y - 6z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 4y + 4z = 10 \\ 2x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + z = -2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ 2x + 3y + 9z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ x + y = 4 \\ -2x + 7y + 12z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y + 6z = -7 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + 4z = 10 \\ x + y = 4 \\ 3x - 4z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 2y + 2z = 15 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + 3z = 7 \\ -3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x - 3y + 3z = 12 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = -4 \\ 5x - 2y + z = 6 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 4y = 4 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3z = 5 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = -6 \\ x + z = 5 \\ 2x - y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y - z = -1 \\ 3y - z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - z = 4 \\ x - 2y = -2 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = z \\ x + z = y \\ y - z = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 16 \\ 6x - y - 18z = -8 \\ -4x + 3y + 12z = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 3y = 2 \\ 4x + 13y - z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ 5x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y = -14 \\ 2x - y + z = 1 \\ 9x - y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 4y + 4z = 10 \\ 2x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = -6 \\ x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = \frac{33}{2} \\ 5x - 2y + 3z = \frac{49}{2} \\ 3x - 2z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \\ -x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 3x + 3y = 5 \\ x + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y = 1 \\ -x + 4y - 2z = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 11y - 3z = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = -1 \\ x - y + z = 2 \\ x + 2y + z + t = 3 \\ -x + y + 2t = -1 \\ -x + 7y + 2z + 8t = 1 \\ -x + 2y + 5z + t = 0 \\ 3x - 2y - 9z + t = 0 \\ x - 4y - 8z - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y + 11z - t = 8 \\ 2x + 5z + 3t = 4 \\ x - y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + y - z + t = -1 \\ x + y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 1 \\ x + y - z + t = 2 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \\ x + z + t = 3 \\ x + 2z + t = 1 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 2x + 4y - 6t = 0 \\ x + y - z + 2t = 0 \\ 3x + 6y - 9t = -1 \\ x + y + z + t = 10 \\ 2x - 3z + 2t = 4 \\ 3y + z - 5t = 6 \\ -x + 2z = 0 \\ 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

- En los siguientes sistemas, elimina una ecuación que dependa de las demás:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \\ x - 4y = -4 \\ x + 3y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

- Obtén un sistema equivalente a $\begin{cases} 60x - 40y + 80z = 20 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ simplificando la 1ª ecuación

- Transforma los siguientes sistemas usando la regla de equivalencia que se indica y después resuélvelos:

a) $\begin{cases} y + 3x = -5 \\ 2x - 5y + z = 6 \\ 12x = -24 \end{cases}$ (Intercambia la 1ª y 2ª ecuación)

b) $\begin{cases} 7x + 6y = -4 \\ -5x + 2y = 6 \end{cases}$ (Multiplica la 2ª ecuación por -3 y súmala a la 1ª ecuación la 2ª ecuación)

c) $\begin{cases} 48x - 72y + 24z = 168 \\ x + y = -6 \end{cases}$ (Divide la 1ª ecuación entre 24)

d) $\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 15x - 5y = 10 \\ 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$ (Elimina aquellas ecuaciones que sean iguales o proporcionales a otras del sistema)

- Explica por qué los siguientes sistemas son equivalentes: $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ z = 2x + y = 7 \end{cases}$

- Sin resolver los sistemas explica por qué son incompatibles: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 11 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x + y - 4z = 1 \\ 2x + 2y - 6z = 7 \end{cases}$

- Escribe un sistema de ecuaciones lineales que tenga como solución $x = 3, y = 2$

- Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? Razónalo y en caso afirmativo, pon un ejemplo.

- Un sistema lineal de dos ecuaciones con tres incógnitas ¿puede ser compatible e indeterminado? ¿Y compatible determinado? Razonar la respuesta con algún ejemplo

- Selecciona la respuesta correcta:

Se llaman sistemas equivalentes:

Los que tienen el mismo número de ecuaciones

Los que tienen el mismo número de incógnitas

Los que tienen las mismas soluciones

Los que valen lo mismo

- ¿Cuál de estas transformaciones no produce un sistema equivalente?

Suprimir filas de la matriz ampliada que sean combinación lineal de las restantes

Suprimir columnas de la matriz ampliada que sean combinación lineal de las restantes

Multiplicar las filas de la matriz ampliada por números distintos de cero
Cambiar de orden las filas de la matriz ampliada
Sumar a una fila de la matriz ampliada una combinación lineal de las restantes

– Selecciona la respuesta correcta:

En un sistema compatible determinado:

El rango de la matriz ampliada es mayor que el rango de la matriz de coeficientes

El rango de la matriz ampliada es menor que el rango de la matriz de coeficientes

El rango de la matriz ampliada es mayor que el número de incógnitas

El rango de la matriz ampliada es menor que el número de incógnitas

Los tres números (rangos de las dos matrices y número de incógnitas) son iguales

– Selecciona la respuesta correcta:

En un sistema compatible indeterminado:

El rango de la matriz ampliada es mayor que el rango de la matriz de coeficientes

El rango de la matriz ampliada es menor que el rango de la matriz de coeficientes

El rango de la matriz ampliada es mayor que el número de incógnitas

El rango de la matriz ampliada es menor que el número de incógnitas

Los tres números (rangos de las dos matrices y número de incógnitas) son iguales

– Selecciona la respuesta correcta:

En un sistema incompatible:

El rango de la matriz ampliada es mayor que el rango de la matriz de coeficientes

El rango de la matriz ampliada es menor que el rango de la matriz de coeficientes

El rango de la matriz ampliada es mayor que el número de incógnitas

El rango de la matriz ampliada es menor que el número de incógnitas

Los tres números (rangos de las dos matrices y número de incógnitas) son iguales

– Selecciona la respuesta correcta:

Un sistema homogéneo:

Es siempre compatible determinado

Es siempre compatible indeterminado

Es siempre incompatible

Es trivial

Es siempre compatible

– Selecciona la respuesta correcta:

En un sistema compatible indeterminado el número de parámetros es igual:

Al rango de la matriz de coeficientes menos el número de incógnitas

Al rango de la matriz ampliada menos el rango de la matriz de coeficientes

Al rango de la matriz ampliada menos uno

Al rango de la matriz de coeficientes menos uno

Al número de incógnitas menos el rango de la matriz ampliada

– Un sistema con el mismo número de ecuaciones que incógnitas es compatible indeterminado.

Si se intenta resolver por la regla de Cramer (selecciona la respuesta correcta):

Los determinantes son todos cero

Los determinantes no existen

Algunos determinantes no existen

El determinante de los coeficientes es reductivo

Nadie lo ha intentado nunca

– Un sistema con el mismo número de ecuaciones que incógnitas es incompatible. Si se intenta resolver por la regla de Cramer (selecciona la respuesta correcta):

Los determinantes son todos cero

Los determinantes no existen
 Algunos determinantes no existen
 El determinante de la matriz de coeficientes es cero
 Solo es cero el determinante ampliado

– Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones lineales que tienen solución única. Si ambos sistemas tienen la misma solución y si también tienen la misma matriz de términos independientes, analícese si, entonces, ambos sistemas han de tener igual la matriz de coeficientes. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme).

– Un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿puede ser incompatible? Razónalo y en caso afirmativo, pon un ejemplo.

– Un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? Razónalo y en caso afirmativo, pon un ejemplo.

– Un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? Razónalo y en caso afirmativo, pon un ejemplo.

– Estudia para qué valores de a y b los siguientes sistemas de ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ ax + by + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ bx + az = 0 \end{cases}$$

– Un alumno llamado Juan sale de un examen de Matemáticas y le explica a su amigo Pedro el enunciado de un problema. El diálogo es el siguiente:

Juan: Debíamos resolver un sistema de Cramer de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Las dos primeras ecuaciones eran $3x + 4y + 5z = 18$, $x - y + z = 3$. La tercera no la recuerdo.

Pedro: ¿No recuerdas nada?

Juan: Era $x + 4y$ más un número que no recuerdo, que multiplicaba a la z , y daba 8.

Pedro: ¿Era entero?

Juan: Sí, y positivo. Además, la solución era estrictamente positiva.

Hallar el enunciado correcto del examen.

– Discute los siguientes sistemas con parámetros:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + ay = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} mx + y = 2 \\ -2mx + my = m - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -a \\ 2x - y = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ x - y = 2b \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2(a + y) = -3a \\ y - 3(a + x) = -4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3a \\ -2x + 2ay = 4a \end{cases} \quad \begin{cases} kx + 2y = 7 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx - 2y = -3b \\ b - y = -bx \end{cases} \quad \begin{cases} x \cos a + y \sin a = 1 \\ x \sin a - y \cos a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + ay = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = a \\ x + y = a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y = 0 \\ -x = a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - mz = 0 \\ 2x - my + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ 3x + 2y + 4mz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx - 3y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + mz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m - 2)x - y + z = 0 \\ x + (2m - 1)y - mz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + my - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ 3x + 2y + 4mz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 9y + 9z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + my - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - mz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y + az = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - my + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my - z = 0 \\ mx + 3y = 0 \\ 2mx + 7y - mz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - ay - z = 0 \\ (2 - 2a)x + 5y + z = 0 \\ 4x + y + (5 + a)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = c \\ cx + y + (c + 1)z = 1 \\ x + cy + (c - 1)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ ay + 2z = 0 \\ ax - y + (a - 2)z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + ay + z = 4 \\ 6x + 6y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y - az = 3 \\ x + ay - 3z = 1 \\ x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ ax - y + 2z = 2 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = 3 \\ x + y + z = 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ 2x + ky + 3z = 4 \\ x + y + kz = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ 2x - y + kz = 1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + kz = k \\ x + y - kz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + mz = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + az = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ ax + y + (a + 1)z = 1 \\ x + ay + (a - 1)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 1 \\ 4x - y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = k \\ x - y + kz = 1 \\ 2x + ky + z = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = k \\ -x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + kz = 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - ky + z = k \\ x + y + z = 2 \\ -kx + 2y - z = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + ky - kz = k \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 8 \\ 2x + y + z = 10 \\ 3x + 2y + az = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y = 1 \\ ay + z = 1 \\ ax + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - mz = 2 \\ x + y + mz = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx - y - z = -m \\ x - my + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a - 1)z = a \\ x + y + z = a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + my - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 5m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 6 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5 - k)x - 2z = 1 \\ 4x - (1 - k)y + 3z = 5 \\ 2x + (1 - k)z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ my + mz = 4 \\ 4x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = -2m - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + m^2z = m - 1 \end{cases}$$

$$\{ax + y + z = 1 \quad x + ay + z = a \quad x + y + az = a^2$$

$$\begin{aligned} &\{x + y + z = 1 \quad x + y + az = a \quad x + y + az = a^2 \\ &\{3x + my + z = m - 2 \quad x + y + 2z = 0 \quad mx + y - z = m - 2 \\ &\{x + y + z = m + 1 \quad mx + y + (m - 1)z = m \quad x + my + z = 1 \\ &\{ax + y - z = 1 \quad x - ay + z = 4 \quad x + y + az = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{x - 3y + 5z = 2 \quad 2x - 4y + 5z = 2 \quad 5x - 11y + 9z = a \\ &\{x + y - z = a \quad ax - y - 4z = 0 \quad ay - z = -1 \\ &\{ax + y + z = 4a \quad x - y + z = a + 1 \quad x + (a + 1)y + az = a + 5 \\ &\{2y + kz = k \quad (k - 2)x + y + 3z = 0 \quad (k - 1)y = 1 - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{2x + 3y + az = 0 \quad ay - z = 2 \quad ax + ay + az = a \\ &\{x + (1 + a)y + z = 2a \quad x + y + z = a \quad x + y + (1 + a)z = 0 \\ &\{(1 - a)x + (2a + 1)y + (2a + 2)z = a \quad ax + ay = 2a + 2 \quad 2x + (a + 1)y + (a - 1)z = a^2 - 2a + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{x + y + mz = m + 2 \quad x + my + z = m \quad mx + y + z = -2(m + 1) \\ &\{3x - ky + 2z = k - 1 \quad 2x - 5y + 3z = 1 \quad x + 3y - (k - 1)z = 0 \\ &\{(a + 1)x + y + z = 2 - a \quad x + (a + 1)y + z = -2 \quad x + y + (a + 1)z = a \\ &\{2x + y + mz = m \quad x + z = 1 \quad 2x + my + z = m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{kx - 2y - (k + 2)z = k - 1 \quad x + ky = k - x + 2y + (k + 2)z = 0 \\ &\{x + ay + 3z = 1 \quad ax + 3y + 4z = 0 \quad 3x + (a + 2)y + 5z = a - 3 \\ &\{x + y + z = k \quad 2x + ky + 3z = 4 \quad x + y + kz = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{x - 2my + 3z = 0 \quad 2x - 3y + mz = 0 \quad y + 2z = 0 \quad mx - y + 2z = 0 \\ &\{2y - z = a \quad 3x - 2z = 11 \quad y + z = 6 \quad 2x + y - 4z = a \\ &\{kx + ky - z = 2 \quad 3x - ky = 0 \quad 5x + ky = 0 \quad x + 2z = 1 \\ &\{ax + y + z = 1 \quad x + ay + z = 1 \quad x + y + az = 1 \quad x + y + z = a \\ &\{-y + z = 3 - 2x \quad x + ay - 4z = a - x \quad x + y + z = 3 \quad x + y - z = 1 \end{aligned}$$

$$\{2x + my - 4z = m \quad x - y + z = 7 \quad x + y - z = 1 - x + y + z = 3$$

$$\begin{aligned} &\{x - y + z = 0 \quad ax + by + z = 0 \quad \{2x + y + z = 0 \quad bx + az = 0 \\ &\{x = a - y \quad (a + b)x = 2ab + (a - b)y \quad \{x + ay = -b \quad (1 + b)y - z = -2a \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{ay - bx}{ab} = \frac{x - 2 + y}{b - a} \quad a(a - bx) = b(b - ay) \right.$$

$$\begin{aligned} &\{x - ay + bz = 0 \quad 2x - y + z = 0 \quad ax - by + z = 0 \\ &\{2x - 5y + az = -2 \quad 3x - y + 2z = 1 \quad x + 4y + z = b \\ &\{x + by + az = 1 \quad x + aby + z = b \quad ax + by + z = 1 \\ &\{x + z = 2 \quad 2x - ay + bz = 4 \quad x + y + z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{ax + aby + (1 - a)z = b \quad x + by + z = 2 \quad ax + ay + (1 - a)z = b \\ &\{3ax + 2z = 2 \quad 5x + 2y = b \quad x - 2y + 2bz = 3a \\ &\{3ax + 2z = 2 \quad 5x + 2y = b \quad x - 2y + 2bz = 3a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{x + 2y = a + b - 1 \quad 3x - 7y = a \quad x + y = b \quad 5x - 13y = 5a - 2b \\ &\{x + ay + z = -1 \quad y + 2z = 1 \quad x + y - z = -a - x + bz = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{2x - 3y + z = a \quad x + 2y - 3z = b \quad x - z = c \quad \{x = by + cz \quad y = ax + cz \quad z = ax + by \\ \{x + y + z = 1 \quad ax + by + cz = d \quad a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{aligned}$$

– Elimina los parámetros en los siguientes sistemas para llegar a una ecuación con tres incógnitas, x, y, z:

$$\{x = a \quad y = a + 2 \quad z = a - 1 \quad \{x = a \quad y = 2 \quad z = a - 2 \quad \{x = a + b \quad y = 2a \quad z = -a + b$$

$$\{x = 1 + a + b \quad y = 2 - a \quad z = 2a - b \quad \{x = 1 - a \quad y = 2a \quad z = 2 + a$$