ENS Paris – Filière MP – Sciences physiques 2004 (6 heures)

1.1.1) Les mesures sont indépendantes : $\left\langle (X_1 - < X_1 >)(X_2 - < X_2 >) \right\rangle = 0$

$$\sigma_Y{}^2 = \left\langle (Y - < Y >)^2 \right\rangle = \left\langle (X_1 + X_2 - < X_1 + X_2 >)^2 \right\rangle = \left\langle (X_1 - < X_1 > + X_2 - < X_2 >)^2 \right\rangle$$

$$\sigma_Y{}^2 = \left\langle (X_1 - < X_1 >)^2 \right\rangle + \left\langle (X_2 - < X_2 >)^2 \right\rangle + 2\left\langle (X_1 - < X_1 >)(X_2 - < X_2 >) \right\rangle = \sigma_{X_1}{}^2 + \sigma_{X_2}{}^2 ,$$

$$\sigma_Y{}^2 = \sigma_{X_1}{}^2 + \sigma_{X_2}{}^2$$

1.1.2) Soit la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{N}$; Y est une estimation de la valeur de X. D'après 1.1.1 et du fait que σ_{X_i} ne dépend pas de i : $\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{N^2}\sigma_{\sum_{i=1}^{N} X_i}{}^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{X_i}{}^2 = \frac{1}{N^2} N\sigma_{X_i}{}^2 = \frac{\sigma_X{}^2}{N}$, $\sigma_Y = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$

1.1.3) Erreur systématique (toujours de même sens), non indépendance des erreurs : $\sqrt{N}\sigma_Y \neq \sigma_X$.

1.2.1.1) La quantité de mouvement totale se conserve si les forces extérieures sont bornées :

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$ ou $m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$

Les chocs sont élastiques par hypothèse et de ce fait l'énergie cinétique totale se conserve :

$\frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2}m_1 v'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v'_2{}^2$ ou $m_1(v_1{}^2 - v'_1{}^2) = m_2(v'_2{}^2 - v_2{}^2)$

1.2.1.2) En supposant des chocs de plein fouet, on a : $v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$, d'où :

$$v'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left[2v_2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_1\right] \quad \text{et par symétrie :} \quad v'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[2v_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right)v_2\right]$$

1.2.1.3) $$\Delta K_1 = \frac{1}{2}m_1(v'_1{}^2 - v_1{}^2) = \frac{1}{2}m_1(v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)^2}(2v_2 - 2v_1)(2m_2 v_2 + 2m_1 v_1)$$

$$\Delta K_1 = \frac{-4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\left(\frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2\right) + \frac{2m_1 m_2(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)^2} v_1 v_2$$ et pour ΔK_2 , échanger les indices.

1.2.2.1) D'après le modèle contestable proposé, chaque particule (1) rencontre une et une seule particule (2) et réciproquement sur la durée τ ; dès lors il y a confusion entre la moyenne sur les chocs et celle sur les particules à une date donnée ; or la moyenne sur les chocs est négative car les chocs de particules allant en sens opposés sont plus fréquents que les chocs de particules allant dans le même sens ; mais la moyenne sur les particules est nulle car les champs des vitesses (1) et (2) sont aléatoires et isotropes (fonctions linéaires des champs de vitesses (1) et (2) à la date $(p-1)\tau$, aléatoires et isotropes, et au départ, champ de vitesses (2) aléatoire et isotrope) ; enfin les particules sont nombreuses : à 2 particules (1) de mêmes vitesses, on peut associer 2 particules (2) de vitesses opposées, en parcourant toutes les particules ; sur l'ensemble des particules, la valeur moyenne considérée sur les vitesses instantanées est nulle : $\langle v_1 v_2 \rangle = 0$

1.2.2.2) À la date $(p+1)\tau$, en moyennant ΔK_1 et ΔK_2 sur toutes les particules, on obtient :

$$K_{p+1}^{(1)} - K_p^{(1)} = \frac{1-r}{2}(K_p^{(2)} - K_p^{(1)}) \quad \text{et} \quad K_{p+1}^{(2)} - K_p^{(2)} = -\frac{1-r}{2}(K_p^{(2)} - K_p^{(1)}) \quad \text{avec} \quad r = 1 - \frac{8m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

1.2.2.3) $K_{p+1}^{(2)} - K_{p+1}^{(1)} = r(K_p^{(2)} - K_p^{(1)}) = r^{p+1}K_0^{(2)}$, suite géométrique de raison r, $|r| < 1$ ($m_1 \neq m_2 \neq 0 \Rightarrow$ inégalités strictes) tendant vers 0 ; $N(K_p^{(2)} + K_p^{(1)}) = NK_0^{(2)}$ (conservation de l'énergie) $\Rightarrow$

$K_p^{(2)} = (K_p^{(2)} - K_p^{(1)})/2 + (K_p^{(2)} + K_p^{(1)})/2 \to K_0^{(2)}/2$ et donc $K_p^{(1)}$ et $K_p^{(2)} \to K_0^{(2)}/2$.

1.2.2.4) Comme on l'a vu, l'énergie cinétique totale se conserve : $NK_0^{(2)} = NK + NK$, $K = K_0^{(2)}/2$

D'après le théorème d'équipartition de l'énergie, si l'équilibre thermique est réalisé à la température T_f, l'énergie cinétique moyenne par particule est $k_B T_f / 2$ d'où $K = k_B T_f / 2$. Par mélange de (2) en équilibre thermique à $T_0 = 2T_f$ avec (1) à 0 K : thermalisation avec états intermédiaires hors équilibre car $T_1 \neq T_2$.

1.2.2.5) Convergence géométrique rapide : $T_2 - T_1 = 10^{-3}(T_0 - T_f) = 10^{-3} T_f$ (à la précision des mesures) définit la durée $p\tau$ pour atteindre l'équilibre, soit $K_p^{(2)} - K_p^{(1)} = 10^{-3} K_0^{(2)} / 2$ et $p \simeq -3,7 / \ln |r|$

1.2.2.6) Il n'y a pas lieu de tenir compte d'un choc entre particules identiques car les vitesses sont échangées (avec changement de signe) ; la distribution des énergies cinétiques est inchangée.

1.2.3.1) $\ddot{M}x + kx = 0 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f = \sqrt{k/M}$

1.2.3.2.a) Par choc (instantané), la longueur du ressort et son énergie potentielle ne varient pas, or l'énergie totale du système des deux particules et du ressort se conserve, son énergie cinétique se conserve donc. Leur quantité de mouvement se conserve aussi car la force de tension du ressort est bornée. Comme en 1.2.2, avec les mêmes lois de conservation, on en déduit que l'énergie cinétique moyenne de toutes les particules est *K*.

1.2.3.2.b) Si $\tau >> 1/f$, l'instant où la masse unique *M* subit un choc avec une particule de gaz est aléatoire dans le cycle d'oscillation, la vitesse $v(M)$ juste avant le choc aussi (au sens $< v(M) > = 0$) : la particule unique *M*, au cours des chocs successifs se comporte donc comme l'ensemble des particules (1), son énergie cinétique moyenne tendant vers *K*. L'équation de 1.2.3.1 est vraie sur les longues fractions de temps de la durée τ avant et après choc : $x = x_0 \cos \omega_0 t$, $v = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$, $\langle x^2 \rangle = {x_0}^2 / 2$, $\langle v^2 \rangle = {\omega_0}^2 {x_0}^2 / 2$, $\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \frac{1}{4} k {x_0}^2$, $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{4} m {\omega_0}^2 {x_0}^2 = \frac{1}{4} k {x_0}^2$; $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = K$, à l'équilibre thermique, l'énergie potentielle moyenne du ressort est l'énergie cinétique moyenne *K* d'une particule.

1.2.3.3) Par degré de liberté, énergie moyenne $k_B T/2$ (théorème d'équipartition de l'énergie).

2.1.1) En surface du métal : $\vec{E}_{tangentiel} = \vec{0}$, $\vec{B}_{normal} = \vec{0}$.

2.1.2) Pour une onde plane incidente normalement à la surface, le champ électrique est tangentiel ; il existe donc une onde plane réfléchie, normalement au miroir (pas de diffraction) de champ électrique tangentiel opposé au précédent, $\forall$ *t*, en surface du métal.

2.1.3.a) $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. Dans la suite, on suppose la polarisation rectiligne.

2.1.3.b) $\vec{E}_+ = \vec{E}_0 \cos \omega (t - z/c)$, $\vec{E}_- = -\vec{E}_0 \cos \omega (t + z/c)$, $\vec{E} = 2\vec{E}_0 \sin(\omega z / c) \sin \omega t$ ($\vec{E} = \vec{0}$ sur le 1er plan).

Le champ électrique doit s'annuler sur le 2e plan comme sur le 1er : $\omega d / c = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$ d'où la fréquence de résonance et le champ du mode propre de rang *n* : $f_n = \frac{nc}{2d}$, $\vec{E}_n = 2\vec{E}_{0n} \sin \frac{n\pi z}{d} \sin \frac{n\pi ct}{d}$

2.2) À l'extérieur de la cavité, l'espace est infini, aucune limite n'est imposée, toutes les fréquences de fluctuation du vide sont possibles ; à l'intérieur, seules les fréquences des modes propres de la cavité sont possibles ; les modes internes et externes sont en nombre infini mais l'infini des modes externes est d'ordre supérieur à celui des modes internes, la pression de radiation due aux fluctuations du vide à l'extérieur de la cavité est supérieure à celle due aux fluctuations du vide à l'intérieur d'où une force attractive.
Si *d* diminue, l'écart des fréquences des modes internes augmente ; leur nombre diminue dans un intervalle spectral donné et la pression de radiation interne diminue : la force d'attraction augmente.

2.3.1) La pression de radiation du vide est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité, la force de Casimir sur la surface *S* des plans, égale au produit de la pression par *S* est proportionnelle à *S*.

2.3.2) On utilise le théorème Π de Vaschy-Buckingham : P_c ne dépend pas de *S* mais de *d*, *c*, ε_0 (électromagnétisme) et de *h* (mécanique quantique), la loi cherchée $F(P_c, d, c, \varepsilon_0, h) =$ cste lie 5 grandeurs physiques fonctions de 4 grandeurs fondamentales $[L], [T], [M], [I]$ du système d'unités : la loi cherchée se

réduit à une fonction de 5 − 4 = 1 produit sans dimension indépendant possible ; or $[P_c d^3] = [W] = [hc/d]$ d'où $[P_c d^4/hc] = [1]$, loi de la forme $f(P_c d^4/hc) = cste$ soit $P_c d^4/hc = \xi$ constante.

2.3.3) A.N. : $P_c = 10^5$ Pa, $d = 10{,}7$ nm

2.4.1) La quantité de mouvement transférée au cours des chocs est plus faible si une partie des photons n'est pas réfléchie : la force de Casimir est plus petite avec un métal imparfait.

2.4.2.a) $$f = \xi \int_S \frac{hc}{(d-\Delta z)^4}\, dS \simeq \frac{\xi hc}{d^4} \int_S \left[1 + 4\frac{\Delta z}{d} + 10\left(\frac{\Delta z}{d}\right)^2\right] dxdy \quad \text{d'où} \quad f = \frac{\xi hcS}{d^4}\left[1 + 10\left(\frac{A}{d}\right)^2\right]$$

2.4.2.b) La rugosité maximale des miroirs optiques utilisés en laboratoire est $\lambda/4$.

2.4.2.c) On réalise des miroirs de rugosité maximale $\lambda/100$ (en silice épaisse) pour VIRGO, expérience de détection d'ondes gravitationnelles par un interféromètre de Michelson géant et $\lambda/60$, en optique adaptative.

2.4.2.d) $\Delta f/f = 1\%$ pour $d = 1$ µm $\Rightarrow$ $10(A_{\max}/d)^2 = 10^{-2}$, $A_{\max} = 32$ nm. Si $\lambda = 0{,}6$ µm, $\lambda/4 = 150$ nm, $\lambda/100 = 6$ nm ; les miroirs de laboratoire sont insuffisants ; il faut une rugosité maximale de $\lambda/20$.

3.1.1) Seule intervient la variation de la force de Casimir (compensée à l'équilibre par la pression du laser) :

$$m_0 \ddot{z} = \xi \frac{hcS}{(d-z)^4} - \xi \frac{hcS}{d^4} - m_0 \omega_0{}^2 z$$

3.1.2) À l'ordre un en z/d : $$m_0 \ddot{z} = \xi \frac{hcS}{d^4}\left(\frac{4z}{d}\right) - m_0 \omega_0{}^2 z$$

3.1.3) $$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{4\xi hcS}{m_0 \omega_0{}^2 d^5}} \simeq \omega_0 - \frac{2\xi hcS}{m_0 \omega_0 d^5} \quad \text{d'où} \quad f'_0 - f_0 \simeq -\frac{\xi hcS}{2\pi^2 m_0 f_0 d^5}$$; f'_0 augmente si d croît.

3.1.4) Si d vaut 1 µm : $f'_0 - f_0 \simeq -0{,}85$ Hz

3.1.5) Enlever la plaque métallique, mesurer la fréquence d'oscillation ; remettre la plaque, mesurer la fréquence d'oscillation pour diverses valeurs de d, en déduire par 3.1.3 la variation de F_c.

3.1.6) Le coefficient de qualité $Q = \omega_0/\Delta\omega_0$ doit vérifier $\Delta\omega_0 << |\omega'_0 - \omega_0|$, $Q >> \omega_0/|\omega'_0 - \omega_0|$

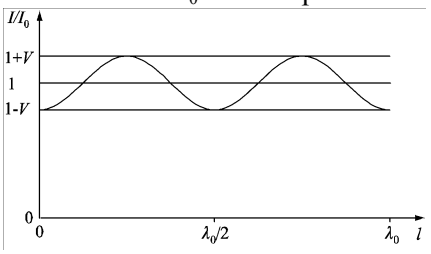
3.1.7) Tracer la courbe $\log(f'_0 - f_0)$ en fonction de log(d), en déduire la pente et l'ordonnée à l'origine ce qui donne l'exposant (−5) et le coefficient de proportionnalité entre $f'_0 - f_0$ et d^{-5}.

3.2.1) Il se produit des déphasages de π par réflexion sur la micro-poutre et nul par réflexion à l'extrémité de la fibre. La différence des chemins optiques géométriques est 2l, le déphasage $4\pi l/\lambda_0$. Les vibrations qui interfèrent sont $E_1 = E_0\sqrt{R_1}\cos\omega t$, $E_2 = E_0(1-R_1)\cos(\omega t - \pi - \frac{4\pi l}{\lambda_0})$ (facteur de transmission $\sqrt{1-R_1}$ à l'aller et au retour) d'où : $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = E_0\left(\sqrt{R_1} - (1-R_1)e^{-4\pi l i/\lambda_0}\right)e^{i\omega t}$ et avec $I_0 = E_0{}^2(1 - R_1 + R_1{}^2)$:

$$I = \underline{E}\underline{E}^* = E_0{}^2\left(1 - R_1 + R_1{}^2 - 2(1-R_1)\sqrt{R_1}\cos\frac{4\pi l}{\lambda_0}\right) = I_0\left(1 - V\cos\frac{4\pi l}{\lambda_0}\right) \quad \text{et} \quad V = \frac{2(1-R_1)\sqrt{R_1}}{1 - R_1 + R_1{}^2} \simeq 2\sqrt{R_1}$$

3.2.2.a) L'intensité varie sinusoïdalement entre $I_0(1-V)$ et $I_0(1+V)$ autour de I_0 avec la période $\lambda_0/2$.

3.2.2.b) Vers un point d'inflexion, la pente est extrémale, l'intensité varie le plus vite avec l. On mesure de petites variations de l au voisinage d'un point d'inflexion. La plage de variation centrée sur un point d'inflexion est limitée à $\lambda_0/4$.



3.2.2.c) $l_0 = (2q+1)\lambda_0/8$, avec $q \in \mathbb{N}$.

3.2.3.a) Si les fluctuations sont proportionnelles à l_0, elles ne

sont pas dues à l'agitation thermique mais par exemple aux fluctuations de l'indice de réfraction de l'air et aux fluctuations $\delta\nu$ de fréquence du laser. Dans ce dernier cas, le déphasage $\varphi = \frac{4\pi l}{\lambda} = \frac{4\pi\nu l}{c}$ fluctue : $\delta\varphi_{laser} = \frac{4\pi l \delta\nu}{c}$; si la sensibilité est Δ, la condition d'observation des franges est $\delta\varphi_\Delta = \frac{4\pi\nu\Delta}{c} > \delta\varphi_{laser}$ soit une condition sur la finesse de la radiation.

3.2.3.b) Le laser doit vérifier $\frac{\nu}{\delta\nu} > \frac{l}{\Delta} \simeq \frac{l_0}{\Delta} = 10^5$ ($l_0 \simeq 50\ \mu$m , $\Delta \simeq 0{,}5$ nm). Il faut l_0 le plus petit possible.

3.2.3.c) La diode laser ne produit pas une lumière très cohérente, sa longueur de cohérence est de l'ordre de quelques 10 µm. Dans une expérience d'interférence avec l'interféromètre de Michelson, on observe peu de franges avec une source classique car la différence des chemins optiques 2*l* est vite supérieure à la longueur de cohérence alors qu'il faut $2l < l_{cohérence}$ (longueur de cohérence de l'onde laser) pour ne pas avoir brouillage (avec un laser He-Ne monochromatique, de grande longueur de cohérence, pas de brouillage).

3.2.4) La diode de référence sert à asservir ou à contrôler l'intensité I_0 faisceau laser.

4.1.1) $z(\theta) = d + R(1-\cos\theta)$

4.1.2) Il faut projeter les forces élémentaires sur l'axe de symétrie (facteur $\cos\theta$) et intégrer sur les éléments de surface $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ de la demi-sphère inférieure :

$F_{ps} = \frac{2\pi^2 hcR^2}{480} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\sin\theta d\theta}{\left[d + R(1-\cos\theta)\right]^4}$; avec $dz = R\sin\theta d\theta$ et $\cos\theta = \frac{R-z+d}{R}$

$F_{ps} = \frac{2\pi^2 hc}{480} \int_{z=d}^{R+d} \frac{(R+d-z)\,dz}{z^4} = \frac{2\pi^2 hc}{480}\left[(R+d)\left(\frac{-1}{3z^3}\right)_d^{R+d} + \left(\frac{1}{2z^2}\right)_d^{R+d}\right]$; si $R >> d$: $F_{ps} \simeq \frac{\pi^2 hcR}{720 d^3}$

4.1.3) $dU_{ps} = -\delta W$ avec $\delta W = F_z dz = -F_{ps} d(d)$, $dU_{ps} = F_{ps} d(d) = \frac{\pi^2 hcR}{720 d^3} d(d)$, $U_{ps} = \frac{-\pi^2 hcR}{1440 d^2} + \text{cste}$

4.2.1) $z \simeq L_2\theta$

4.2.2) Le rayon réfléchi tourne de 2θ si la micro-poutre tourne de θ sous le seul effet de changement d'orientation. La longueur du faisceau est $L_1\sqrt{2}$ et son déplacement sur la photodiode $2\sqrt{2}L_1\theta$. Soit O*xy* le plan de la photodiode (*x'x* en direction du déplacement du faisceau). Les tensions s^+ et s^- dues à chaque partie de la diode sont proportionnelles aux puissances reçues. En remplaçant r^2 par $x^2 + y^2$, on obtient :

$$s^+ = \frac{\alpha I_L}{\pi} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{-2(x-2L_1\sqrt{2}\theta)^2}{w^2}} \frac{\sqrt{2}dx}{w} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-2y^2}{w^2}} \frac{\sqrt{2}dy}{w} = \frac{\alpha I_L}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{-2(x-2L_1\sqrt{2}\theta)^2}{w^2}} \frac{\sqrt{2}dx}{w} = \frac{\alpha I_L}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_{u=0}^{4L_1\theta/w} e^{-u^2} du\right]$$

$s^+ = \frac{\alpha I_L}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{4L_1\theta}{w}\right)\right]$ et de même $s^- = \frac{\alpha I_L}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\frac{4L_1\theta}{w}\right)\right]$ d'où la différence $s = \alpha I_L \text{erf}\left(\frac{4L_1\theta}{w}\right)$

4.2.3) Courbe représentative ci-contre.

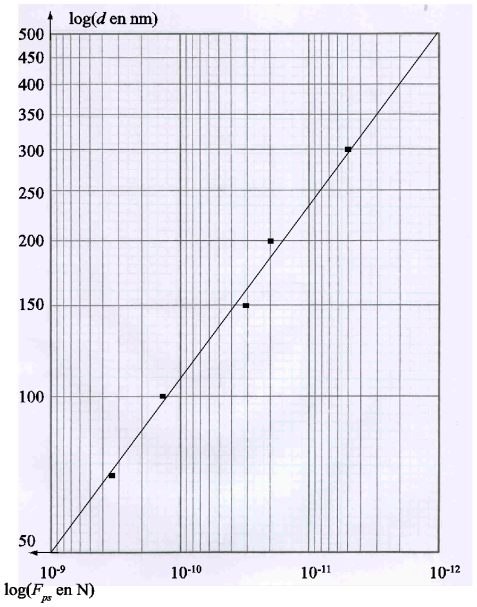


4.2.4) Dépendance linéaire si : $\frac{4L_1\theta}{w} << \pi$ soit $\theta << \frac{\pi w}{4L_1}$

4.3.1) Si le plan conducteur est au potentiel 0 et la sphère au potentiel V_0, soit $V_0 a(\text{M})$ la fonction potentiel entre eux ; par échange des potentiels, soit $V_0 b(\text{M})$ la fonction potentiel. En superposant V_1/V_0 fois l'état 1 et V_2/V_0 fois l'état 2, par linéarité $V(\text{M}) = V_1 a(\text{M}) + V_2 b(\text{M})$; entre conducteurs, la fonction potentiel vérifie $\Delta V = 0$ + conditions limites : potentiels V_2 sur le plan, V_1 sur la sphère ; par unicité, si $V_1 = V_2$, $V(\text{M}) = V_1$ uniforme convient et $a(\text{M}) + b(\text{M}) = 1$, $V(\text{M}) = (V_1 - V_2)a(\text{M}) + V_2$, $\vec{E}(\text{M}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\text{M}) = -(V_1 - V_2)\overrightarrow{\text{grad}}\, a(\text{M})$

est proportionnel à $V_1 - V_2$. Le champ électrique en surface du plan est relié à la densité superficielle de charges par $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}.\vec{n}$. La résultante des forces de pression électrostatique $p = \sigma^2 / 2\varepsilon_0$ est proportionnelle à $(V_1 - V_2)^2$; la sphère est soumise à l'opposé.

4.3.2) Mettre les conducteurs à la masse, repérer la position de la micro-poutre ; mettre le plan à un potentiel non nul : l'extrémité de la micro-poutre s'équilibre sous l'action de la force électrostatique et de la tension du ressort que constitue la micro-poutre ; connaissant l'expression de la force électrostatique en fonction de la géométrie du système, en mesurant le déplacement de l'extrémité de la micro-poutre, on obtient *k*.



4.3.3) À 300 K, $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{k_B T / k} = 0{,}45$ nm très inférieure à la précision requise.

4.4.1) Utiliser le papier millimétrique log-log pour représenter log(*d*) en fonction de log(F_{ps}) (axe inversé pour avoir la pente positive).

4.4.2) Graphe log-log ci-contre.

4.4.3) Pour $d = 70$ nm, l'écart-type sur une mesure de F_{ps} est 2.10^{-11} N ; sur 25, il est $\sqrt{25} = 5$ fois plus petit soit 4.10^{-12} N ; la barre d'incertitude sur $F_{ps} = 3{,}7.10^{-10}$ N est donnée en mm (sur le graphe) par :

$4{,}8[\log(3{,}7.10^{-10} + 4.10^{-12}) - \log(3{,}7.10^{-10} - 4.10^{-12})] \simeq 0{,}5$ mm (4,8 cm est la longueur d'une décade).

4.4.4) On trace une droite au mieux, sa pente est la puissance de $1/d$ dans F_{ps} ; on trouve 3, résultat attendu.

5.1.1) Il faut effectuer un développement limité à l'ordre un. On décompose le condensateur en condensateurs quasi plans, d'armatures de profondeur *D*, de largeur *dx*, d'épaisseur $e + x\theta$ pour celui à la distance *x* de O, en parallèle ; leurs capacités s'ajoutent :

$$C = \varepsilon_0 \int_{x=0}^{2L} \frac{D dx}{e + x\theta} \simeq \varepsilon_0 \frac{D}{e} \int_{x=0}^{2L} \left(1 - \frac{x\theta}{e}\right) dx \simeq \varepsilon_0 \frac{2LD}{e}\left(1 - \frac{L\theta}{e}\right) \quad \text{d'où} \quad C = C_0\left(1 - \frac{L\theta}{e}\right), \quad C_0 = \varepsilon_0 \frac{2LD}{e}.$$

5.1.2.a) Soit *i* l'intensité algébrique dans le sens imposé par la source de tension V_0, *q* la charge sur l'électrode de mesure : $i = \frac{dq}{dt}$, $q = CV_{mes}$ et $-V_0 + R_0 i + V_{mes} = 0 \Rightarrow -V_0 + R_0 \frac{d(CV_{mes})}{dt} + V_{mes} = 0$ d'où :

$$-V_0 + R_0 \frac{dC_0(1 - L\theta/e)(V_r + v)}{dt} + V_r + v = 0$$

5.1.2.b) À l'ordre un : $V_r - V_0 + R_0 C_0 \left(\frac{dv}{dt} - \frac{LV_r}{e}\frac{d\theta}{dt}\right) + v = 0$. En régime stationnaire : $V_r = V_0$

5.1.2.c) En régime variable : $R_0 C_0 \left(\frac{dv}{dt} - \frac{LV_0}{e}\frac{d\theta}{dt}\right) + v = 0$, $R_0 C_0 \frac{dv}{dt} + v = -R_0 V_0 \frac{dC}{dt}$ (erreur de texte).

5.1.2.d) $\underline{v} = \frac{R_0 C_0 V_0 L i\omega}{e(1 + R_0 C_0 i\omega)}\underline{\theta}$, les variations de *v* suivent celles de θ si $\omega >> \frac{1}{R_0 C_0}$ et alors $v = \frac{V_0 L}{e}\theta$

5.2.1) Le travail du moment M_Δ des forces électrostatiques par rapport à l'axe de rotation Δ en O est :

$\delta W = \frac{1}{2}U^2 dC = M_\Delta d\theta$ avec $C = C_0\left(1 + \frac{L\theta}{e}\right)$ et $U = V_c + V_a(t)$ d'où $M_\Delta = \frac{LC_0}{2e}\left(V_c + V_a\right)^2$

ce qui revient à appliquer une force $F = \frac{M_\Delta}{L}$ au milieu de l'armature, soit $F = \frac{C_0}{2e}\left(V_c + V_a\right)^2$

5.2.2) *F* excite à une seule fréquence si $|V_a| << V_c$ et alors $F \simeq \frac{C_0 V_c \left(V_c + 2V_a\right)}{2e}$

5.3.1) $F_{ps}=\dfrac{\pi^2 hcR}{720(d-b\theta)^3}\simeq\dfrac{\pi^2 hcR}{720d^3}\left(1+\dfrac{3b\theta}{d}\right)$ de moment bF_{ps} par rapport à Δ ; le moment excitateur est $M_\Delta\simeq\dfrac{LC_0V_c\left(V_c+2V_a\right)}{2e}$; le moment exercé par l'électrode de mesure est $M'_\Delta\simeq-\dfrac{LC_0V_0\left(V_0+2v\right)}{2e}$;

d'après le théorème du moment cinétique par rapport à Δ :

$\ddot{I\theta}=-2\gamma\dot{I\theta}-\eta\theta+\dfrac{\pi^2 hcbR}{720d^3}\left(1+\dfrac{3b\theta}{d}\right)+\dfrac{LC_0V_c\left(V_c+2V_a\right)}{2e}-\dfrac{LC_0V_0\left(V_0+2v\right)}{2e}$. Si θ est nul à l'équilibre :

$\dfrac{\pi^2 hcRb}{720d^3}+\dfrac{LC_0(V_c{}^2-V_0{}^2)}{2e}=0$ d'où : $\ddot{I\theta}+2\gamma\dot{I\theta}+\eta\theta=\dfrac{3\pi^2b^2hcR}{720d^4}\theta+\dfrac{LC_0(V_cV_a-V_0v)}{e}$; $v=\dfrac{V_0L}{e}\theta\ \Rightarrow$

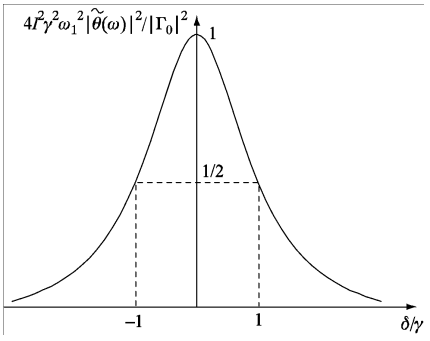
$\ddot{\theta}+2\gamma\dot{\theta}+\omega_1{}^2\theta=\dfrac{LC_0V_cV_a}{Ie}$, $\omega_1{}^2=\dfrac{1}{I}\left[\eta-\dfrac{\pi^2hcRb^2}{240d^4}+C_0V_0{}^2\left(\dfrac{L}{e}\right)^2\right]$ $\ddot{\theta}+2\gamma\dot{\theta}+\omega_1{}^2\theta=\dfrac{\Gamma(t)}{I}$

$\Gamma(t)=\dfrac{LC_0V_c}{e}V_a(t)$

5.3.2) L'énoncé ne semble pas tenir compte du dernier terme de ω_1 ; dans cette hypothèse : $\omega_1{}^2\simeq\dfrac{1}{I}\left(\eta-\dfrac{\pi^2hcRb^2}{240d^4}\right)$

$d=3\,\mu\text{m}$, $\omega_1=1,72.10^4$ rad.s^{-1} , $f_1=2,74.10^3$ Hz

$d=100$ nm , $\omega_1=1,71.10^4$ rad.s^{-1} , $f_1=2,72.10^3$ Hz



5.3.3) $\tilde{\theta}(\omega)=\dfrac{\Gamma_0e^{i\omega t}}{I(\omega_1{}^2-\omega^2+2i\gamma\omega)}\ \Rightarrow\ \left|\tilde{\theta}(\omega)\right|^2=\dfrac{(\Gamma_0/I)^2}{(\omega_1{}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}$

.

Vers la résonance, avec $\delta=\omega-\omega_1$, on remplace ω par ω_1 sauf dans $\omega-\omega_1$: $\left|\tilde{\theta}(\omega)\right|^2=\dfrac{\Gamma_0{}^2}{4\omega_1{}^2I^2}\dfrac{1}{\delta^2+\gamma^2}$

5.3.4) Courbe de résonance ci-dessus : le maximum est obtenu pour $\delta=0$ et la largeur à mi-hauteur est 2γ

.

5.4.1.a) $\text{O}\Sigma\cos\psi=b$, $\text{O}\Sigma\sin\psi=d+R$, $\text{O}\Sigma\sin(\psi-\theta)=D+R$, en développant le sinus et en remplaçant $\cos\psi$ et $\sin\psi$ par leurs valeurs : $D=(d+R)\cos\theta-b\sin\theta-R$

5.4.1.b) $\dfrac{D}{d}\simeq\left(1+\dfrac{R}{d}\right)\left(1-\dfrac{\theta^2}{2}\right)-\dfrac{b}{d}\left(\theta-\dfrac{\theta^3}{6}\right)-\dfrac{R}{d}$, $\theta_0=10^{-4}$ rd , $R/d=2.10^3$, $b/d=1,3.10^3$ d'où :

$\dfrac{D}{d}\simeq\left(1+2.10^3\right)\left(1-\dfrac{10^{-8}}{2}\right)-1,3.10^3\left(10^{-4}-\dfrac{10^{-12}}{6}\right)-2.10^3=1-\dfrac{10^{-8}}{2}+10^{-5}-0,13+\dfrac{1,3.10^{-9}}{6}$; $D\approx d-b\theta$

5.4.2) $F_{ps}(d-b\theta)\simeq\dfrac{\pi^2hcR}{720d^3}\left(1+\dfrac{3b}{d}\theta+\dfrac{6b^2}{d^2}\theta^2+\dfrac{10b^3}{d^3}\theta^3\right)=\dfrac{\pi^2hcR}{720d^3}\left(1+0,42+0,10+0,022\right)$

Il faut conserver le terme d'ordre 3 pour avoir une approximation valable au moins à 1 % près.

Si H est la projection du centre Σ de la sphère sur l'oscillateur de tension et ψ l'angle entre OH et OΣ :

$M_{ps} = \mathrm{OH}\, F_{ps} = bF_{ps}\dfrac{\cos(\psi-\theta)}{\cos(\psi)} = bF_{ps}\left(\cos\theta + \sin\theta\dfrac{\sin\psi}{\cos\psi}\right) \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{d+R}{b}\left(\theta - \dfrac{\theta^3}{3}\right) \simeq 1$ à 10^{-4} près. Donc $M_{ps} \simeq bF_{ps}$ et $\dfrac{M_{ps}}{I} = \dfrac{\pi^2 hcRb}{720Id^3}\left(1 + \dfrac{3b}{d}\theta + \dfrac{6b^2}{d^2}\theta^2 + \dfrac{10b^3}{d^3}\theta^3\right) \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_1{}^2\theta = \dfrac{\Gamma(t)}{I} + \alpha\theta^2 + \beta\theta^3$ avec :

$\alpha = \dfrac{6\pi^2 hcRb}{720Id^3}\left(\dfrac{b}{d}\right)^2 = \dfrac{b^3 F_{ps}''}{2I}$ et $\beta = \dfrac{10\pi^2 hcRb}{720Id^3}\left(\dfrac{b}{d}\right)^3 = -\dfrac{b^4 F_{ps}'''}{6I}$ $\qquad \beta = \dfrac{5\alpha b}{3d}$

5.4.3.a) $\ddot{\theta} + \omega_1{}^2\theta = \alpha\theta^2 + \beta\theta^3$; par développement limité à l'ordre 3 en θ puis par identification des harmoniques de mêmes rangs :

$-\omega^2\theta_0\cos\omega t - 4\omega^2 A\theta_0{}^2\cos 2\omega t - 9\omega^2 A'\theta_0{}^3\cos 3\omega t + \omega_1{}^2\left(\theta_0\cos\omega t + A\theta_0{}^2\cos 2\omega t + A'\theta_0{}^3\cos 3\omega t + B\theta_0{}^2\right)$

$\simeq \alpha\left(\theta_0{}^2\cos^2\omega t + 2A\theta_0{}^3\cos\omega t\cos 2\omega t + 2B\theta_0{}^3\cos\omega t\right) + \beta\theta_0{}^3\cos^3\omega t$

$\simeq \alpha\left[\theta_0{}^2(1+\cos 2\omega t)/2 + A\theta_0{}^3(\cos 3\omega t + \cos\omega t) + 2B\theta_0{}^3\cos\omega t\right] + \beta\theta_0{}^3(\cos 3\omega t + 3\cos\omega t)/4$ d'où :

$B = \dfrac{\alpha}{2\omega_1{}^2}$ (1), $\omega_1{}^2 - \omega^2 = \left(\alpha A + 2\alpha B + \dfrac{3}{4}\beta\right)\theta_0{}^2$ (2), $A(\omega_1{}^2 - 4\omega^2) = \dfrac{\alpha}{2}$ (3), $A'(\omega_1{}^2 - 9\omega^2) = \alpha A + \dfrac{\beta}{4}$ (4)

$\omega^2 \simeq \omega_1{}^2 + 2\kappa\omega_1\theta_0{}^2$ et (2) $\Rightarrow$ $-2\kappa\omega_1 = \alpha A + 2\alpha B + \dfrac{3}{4}\beta$ (2') ; (3) $\Rightarrow$ $A = \dfrac{\alpha}{2(\omega_1{}^2 - 4\omega^2)} \simeq -\dfrac{\alpha}{6\omega_1{}^2}$ $A = -\dfrac{B}{3}$;

(2') $\Rightarrow$ $\kappa = -\dfrac{5\alpha^2}{12\omega_1{}^3} - \dfrac{3\beta}{8\omega_1}$ et (4) $\Rightarrow$ $A' = \dfrac{\alpha^2}{48\omega_1{}^4} - \dfrac{\beta}{32\omega_1{}^2}$

5.4.3.b) $\langle\theta(t)\rangle = B\theta_0{}^2 = \dfrac{\alpha\theta_0{}^2}{2\omega_1{}^2}$; à l'équilibre $\omega_1{}^2\theta = \alpha\theta^2 + \beta\theta^3$ d'où $\theta = 0$ et $\theta \neq 0$, valeur considérée ; $<\theta> \neq 0$ est dû au fait que le terme de moment $\alpha\theta^2 > 0$ introduit une dissymétrie entre $\theta > 0$ et $\theta < 0$.

5.4.4.a) A.N.: $4L = 1{,}9$ cm, $\alpha = 1{,}01.10^{10}$ rad^{-1}.s^{-2}, $\beta = -2{,}2.10^{13}$ rad^{-2}.s^{-2}, $\kappa = -2{,}3.10^3$ rad^{-1}.s^{-1} < 0

5.4.4.b) $\omega - \omega_1 \rightarrow \omega - \omega_{rés} = \delta - \kappa\theta_0{}^2 = \delta - \kappa\tilde{\theta}^2 \Rightarrow \left|\tilde{\theta}(\omega)\right|^2\left[\left(\delta - \kappa\left|\tilde{\theta}(\omega)\right|^2\right)^2 + \gamma^2\right] = \dfrac{\Gamma_0{}^2}{4\omega_1{}^2 I^2}$

5.4.4.c) Équation de degré 3 en $\left|\tilde{\theta}^2\right|$: 1 ou 3 racines réelles valables si elles sont positives et si le régime associé est stable.

5.5.1) L'amplitude est au plus de 3.10^{-4} rad, ordre de grandeur des approximations.

5.5.2) Si on approche la sphère, *d* diminue, le terme en $1/d^4$ augmente dans $\omega_1{}^2$; ω_1 diminue.

5.5.3) Si *d* diminue : α, β et le comportement non linéaire augmentent, la courbe de résonance se déforme ; on passe, à ω donnée, de 1 solution à 3 solutions, 2 d'amplitudes extrêmes stables et l'autre instable.

5.5.4) Selon que ω croît ou décroît, le chemin diffère, le système peut décrire un cycle d'hystérésis (bistabilité).