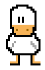
Karl Entacher 

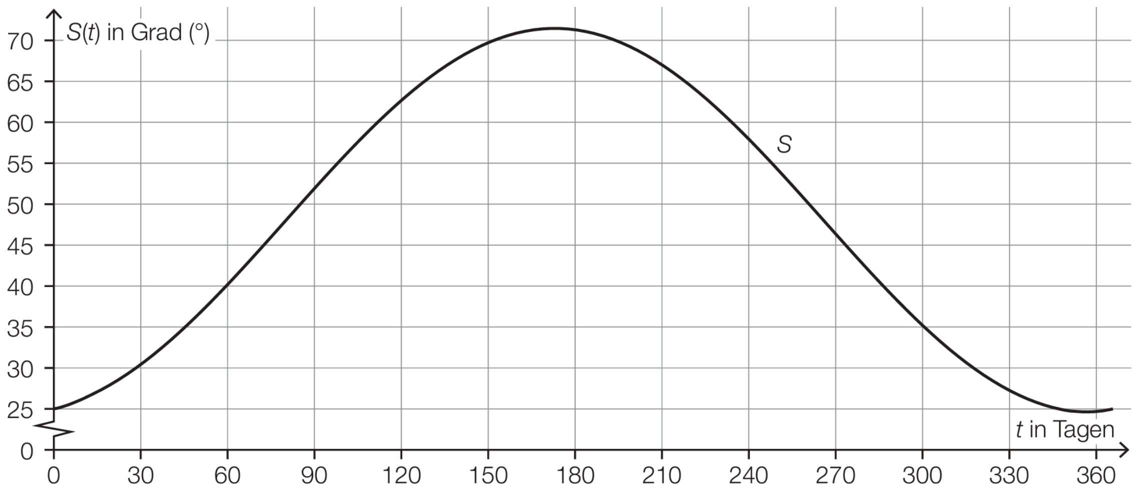
Beispiele zum Differenzenquotienten aus SRDP Aufgaben

Adaptiert und erweitert aus dem Aufgabenpool Bereich Angewandte Mathematik (eigenständig ergänzte Fragestellungen in blauer Schrift) Quelle: https://prod.aufgabenpool.at/ (Nov. 2023), Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (siehe auch https://www.matura.gv.at/)

---

1) Sonnenlicht und Vitamin D (A 300)

Für die Bildung von Vitamin D in der Haut ist Sonnenlicht nötig. Ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre zu klein, kann kein Vitamin D gebildet werden. Für jeden Tag eines Jahres wird der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen betrachtet. Für eine bestimmte Stadt ist die zeitliche Entwicklung dieses Winkels als Graph der Funktion S dargestellt.



t ... Zeit ab Jahresbeginn in Tagen
$S(t)$ ... größter Einfallswinkel der Sonnenstrahlen zur Zeit t in Grad (°)

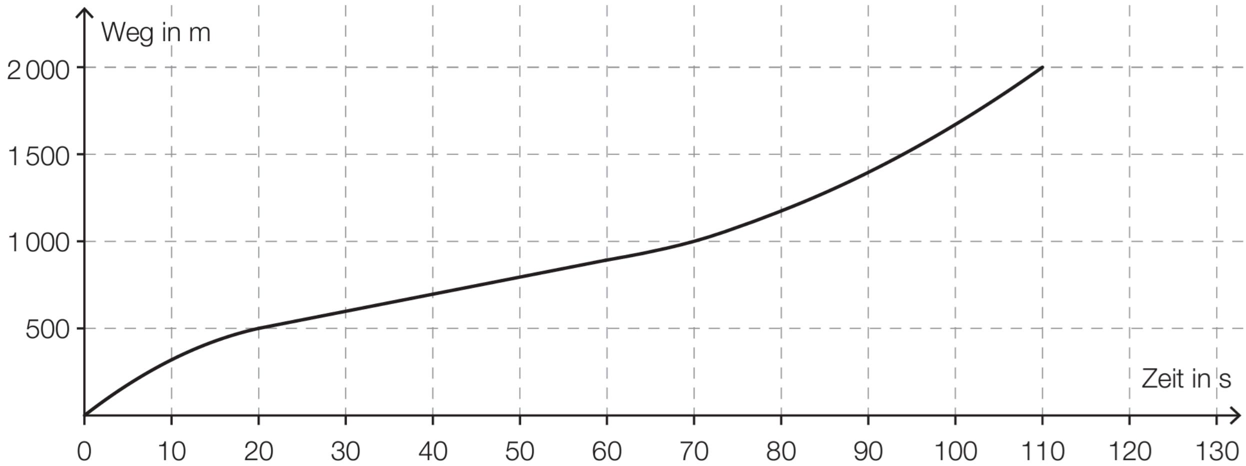
a) Lesen Sie dasjenige Zeitintervall ab, in dem der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen mindestens 45° beträgt.
[_______ ; _______] (in Tagen)

b) Es wird folgende Berechnung durchgeführt: $\frac{S(90)-S(0)}{90} = 0,3$. Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

---

2) Section-Control (A 226)

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt. Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.



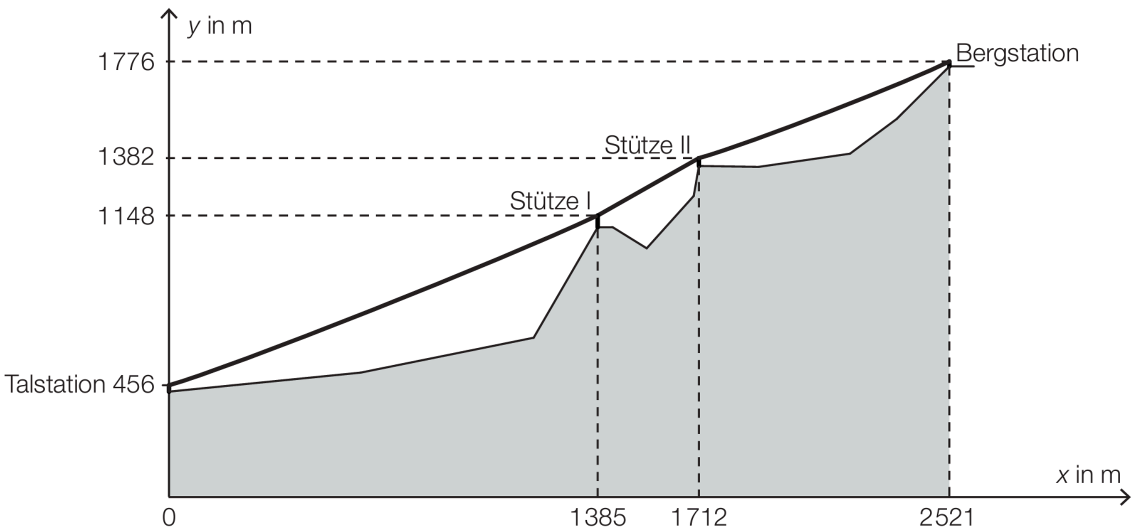
a) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.

b) Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

---

3) Gondelbahn auf den Untersberg (A 224)

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.



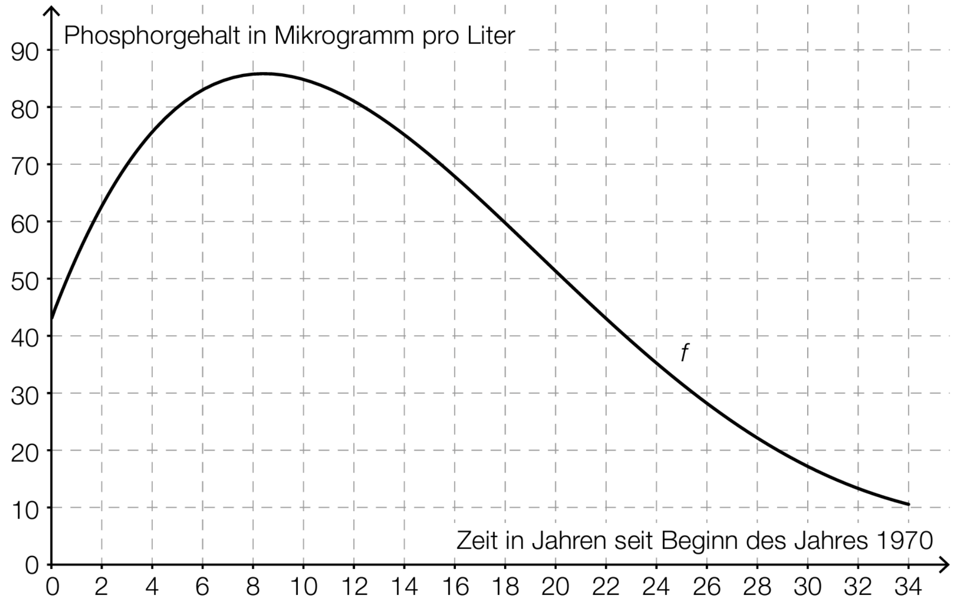
x ... horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)
y ... Höhe über Meeresniveau in m

a) Es wird folgende Berechnung durchgeführt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1776-456}{2521} \approx 0,52$. Beschreiben Sie, was das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet.

b) Der Seilverlauf zwischen Stütze I und Stütze II wird vereinfacht als linear angenommen. Überprüfen Sie nachweislich, ob der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt kleiner als 40° ist.

4) Bodensee (A 253)

Der Phosphorgehalt im Bodensee kann im Zeitraum von 1970 bis 2004 näherungsweise durch eine Polynomfunktion f beschrieben werden.



a) Ermitteln Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen von f die mittlere Änderungsrate des Phosphatgehaltes im Zeitintervall [12; 18].

b) Lesen Sie vom Graphen ab, zu welchem Zeitpunkt der Phosphorgehalt am stärksten abnimmt.

5) Brennofen (A 236)

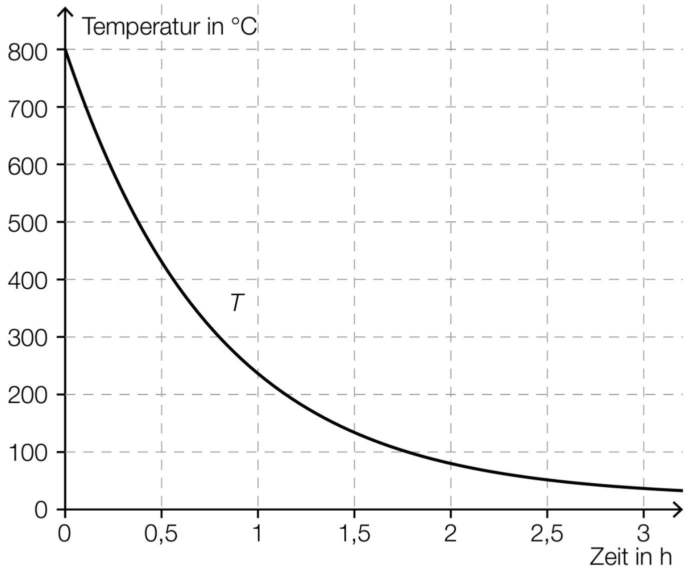
Bei einem Keramik-Produzenten werden Krüge hergestellt. Sobald ein Krug aus dem Brennofen genommen wird, beginnt er abzukühlen. Der Temperaturverlauf lässt sich durch die Funktion T beschreiben:

$T(t) = 20 + 780 \cdot e^{-k \cdot t}$.

t ... Zeit seit der Entnahme aus dem Brennofen in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur des Kruges zur Zeit t in Grad Celsius (°C)
k ... Konstante

a) Ein Krug hat 2 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen eine Temperatur von 80 °C. Berechnen Sie die Temperatur des Kruges 5 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen.

b) Der Graph der Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:

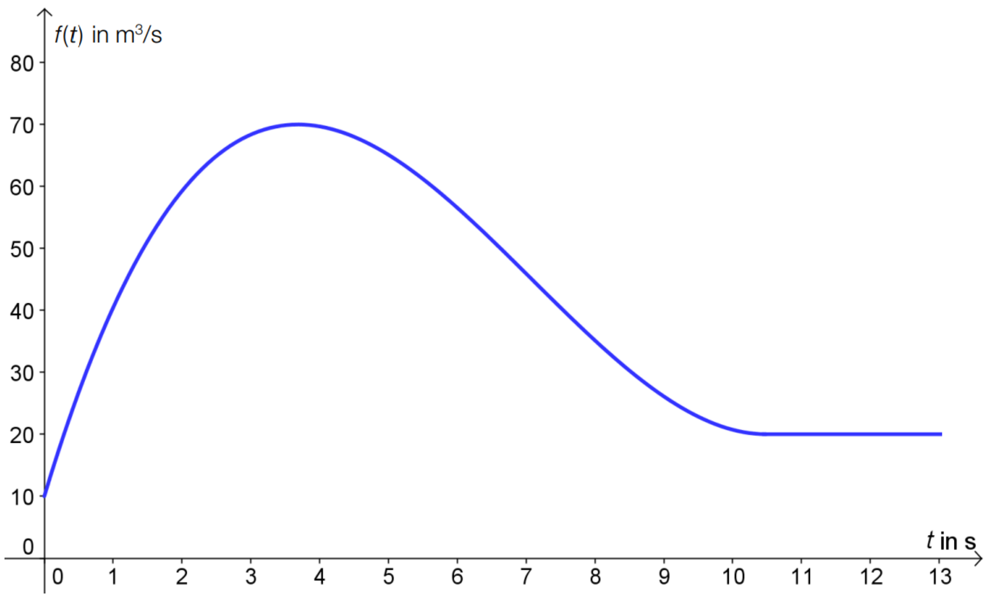


Skizzieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Tangente an den Funktionsgraphen, deren Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) 600 beträgt.

c) Beschreiben Sie, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$\frac{T(3)-T(1)}{2}$

6) Volumenstrom (A 049)

Wasser an einer Staustufe wird über Kanäle in einen Fluss abgelassen. Das Wasservolumen, das pro Zeiteinheit an einer Messstelle in einem Kanal vorbeifließt, bezeichnet man als Volumenstrom. Dieser geht nach dem Öffnen des Tores nach einem Schwall allmählich in einen konstanten Volumenstrom über. Der nachstehende Graph stellt die Entwicklung des Volumenstroms f in einem Kanal in den ersten 13 Sekunden nach Öffnen des Tores dar.



a) Lesen Sie aus der Grafik aus, wann der Volumenstrom am stärksten ist.

b) Bestimmen Sie aus der Grafik die durchschnittliche Änderungsrate im Zeitintervall [1 s, 3 s].

c) Ermitteln Sie aus der Grafik die momentane Änderungsrate des Volumenstroms zum Zeitpunkt $t = 1$ s und zum Zeitpunkt t = 6,5 s.

---

7) Höhenwachstum von Fichten (B 350)

Der Zusammenhang zwischen dem Alter und der durchschnittlichen Höhe von Fichten kann näherungsweise mithilfe einer Funktion h beschrieben werden: $h(t) = a \cdot e^{-b/t}$.

t ... Alter in Jahren
$h(t)$ ... durchschnittliche Höhe im Alter t in Metern (m)
$a > 0$ ... Parameter in m
$b > 0$ ... Parameter in Jahren

a) Begründen Sie mathematisch warum $h(0)$ nicht definiert ist

b) Begründen Sie mathematisch, warum die durchschnittliche Höhe in diesem Modell den Wert von a nicht überschreiten kann.

c) Für einen 80-jährigen Fichtenbestand beträgt die durchschnittliche Höhe der Fichten 19,24 m. Der Parameter a ist gleich 28 m. Berechnen Sie den Parameter b.

d) Berechnen Sie anhand der Angaben aus c), um wie viel Prozent die durchschnittliche Höhe in den nächsten 20 Jahren zunehmen wird.

Für einen Fichtenbestand gilt: $a = 60$ m, $b = 50$ Jahre.

e) Stellen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall [10; 70] grafisch dar.

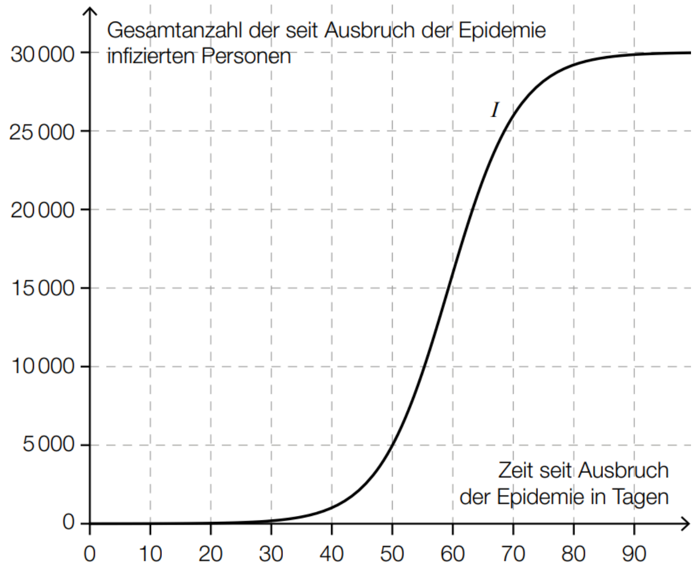
f) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [30; 40]

g) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten.

---

8) Epidemie (A 255)

a) Der zeitliche Verlauf der Gesamtzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch eine Funktion I beschrieben werden. Der Graph der Funktion I ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie den Ausdruck $I(45)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

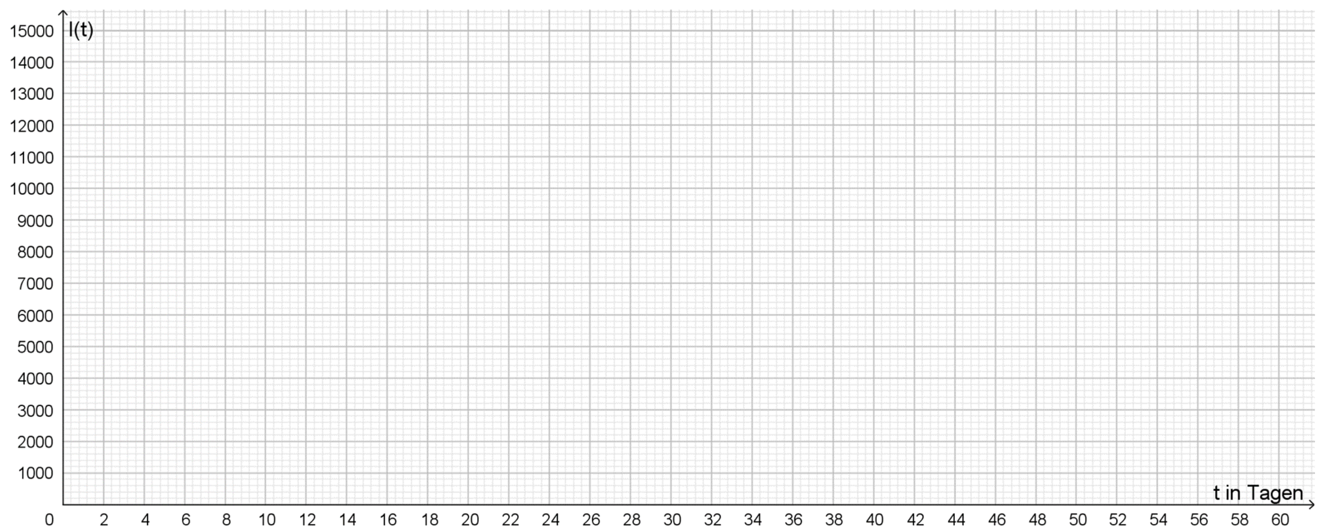
– Bestimmen Sie aus der Grafik den Wert der mittleren Änderungsrate der Infektionszahlen für das Zeitintervall [50, 60]

b) Der zeitliche Verlauf der Gesamtzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen in einem bestimmten Bundesland kann näherungsweise durch die folgende Funktion I beschrieben werden:

$$I(t) = \frac{15000}{1+1500\cdot e^{-0,25\cdot t}}$$

t … Zeit seit Ausbruch der Epidemie in Tagen, $0 \leq t \leq 60$Tage
$I(t)$ … Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen zur Zeit t

– Skizzieren Sie die Funktion $I(t)$ für den gegebenen Zeitraum im Grafikfeld unten.
– Ermitteln Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell erstmals mehr als 12000 Personen infiziert sein werden
– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall [22; 32] Tagen.



c) Der zeitliche Verlauf der Gesamtzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen in einem bestimmten Bundesland kann näherungsweise durch die folgende Funktion I beschrieben werden:

$$I(t) = \frac{30000}{1+b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$$

t … Zeit seit Ausbruch der Epidemie in Tagen
$I(t)$ … Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen zur Zeit t

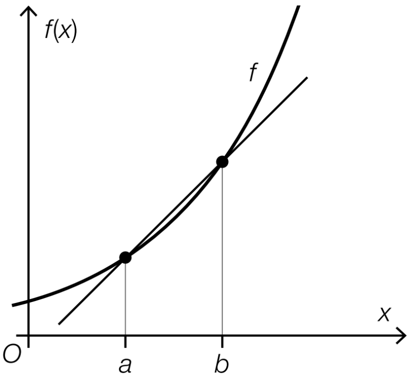
Nach 41 Tagen wurden insgesamt 1200 infizierte Personen registriert.

- Berechnen Sie den Parameter b.
- Ermitteln Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden.

---

9) Graph und Sekante

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der differenzierbaren Funktion f sowie die Sekante durch die Punkte (a|f(a)) und (b|f(b)) dargestellt.



Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Ausdruck $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist ____①____ und entspricht der ____②____.

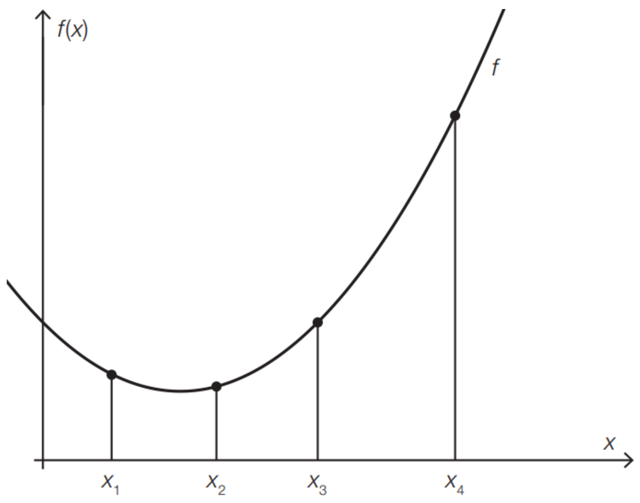
①	
der Differenzenquotient im Intervall [a; b]	☐
der Differenzialquotient an der Stelle b	☐
die mittlere Änderungsrate im Intervall [a; b]	☐

②	
Tangentensteigung in (b | $f(b)$)	☐
Tangentensteigung in (a | $f(a)$)	☐
Sekantensteigung im Intervall [a; b]	☐

---

10) Differenzenquotient und Differentialquotient (1_746)

Nachstehend ist der Graph einer quadratischen Funktion f abgebildet. Zusätzlich sind vier Punkte auf dem Graphen mit den x-Koordinaten x_1 , x_2 , x_3 und x_4 eingezeichnet.



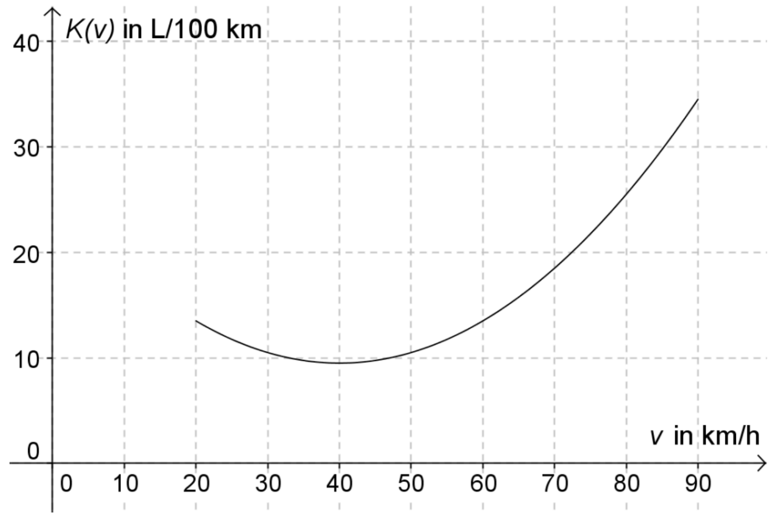
Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion *f* zutreffenden Aussagen an.

Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_2]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_1.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_3]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_3.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_4]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_2.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_2; x_4]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_2.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_3; x_4]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_4.	☐

---

11) Kraftstoffverbrauch (B 176)

Die nachstehende Grafik zeigt den Kraftstoffverbrauch eines Kleintransporters in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Fahren mit gleichbleibendem Gang.



a) Veranschaulichen Sie in der Grafik die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h.
b) Lesen Sie die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei 60 km/h ab.

c) Bestimmen Sie aus der Grafik den Differenzenquotienten für das Intervall [60; 90] km/h.

---

12) Baumwachstum (2_010)

Die nachstehende Tabelle enthält Messwerte des Umfangs eines bestimmten Baumstamms in Abhängigkeit von seinem Alter.

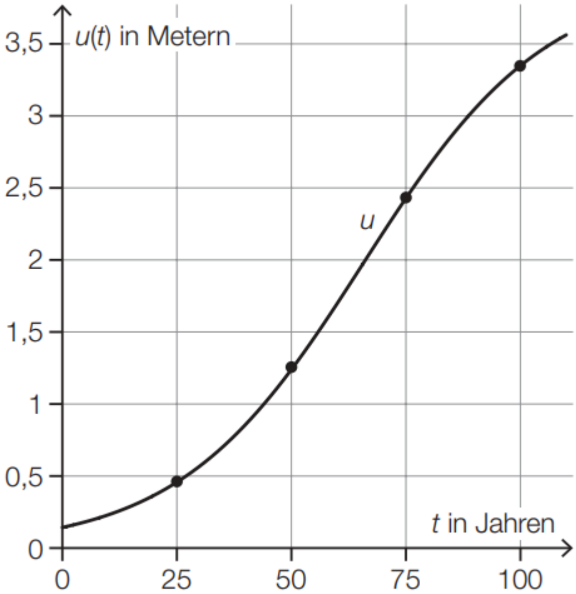
Alter t (in Jahren)	25	50	75	100
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370

Dieser Zusammenhang kann durch eine Wachstumsfunktion u modelliert werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

a) Interpretieren Sie den Differenzenquotient von u im Zeitraum von 50 bis 75 Jahren unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang (d.h. Wert angeben und die Interpretation in Worten)

b) Es gilt: $u'(50) = 0{,}043$. Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Messwerte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht



Lesen Sie aus der obigen Abbildung denjenigen Zeitpunkt t ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat.

d) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist.