

hydrodynamique

BTS bâtiment (2000)

hydrostatique- gaz parfaits

siphon

I hydrostatique- gaz parfaits : 6 points

Un local utilisé lors de travaux sous-marins est constitué d'un parallélépipède rectangle de hauteur $H = 3,0$ m et de section horizontale $S = 15$ m². Sa partie inférieure est munie d'un orifice lui permettant de communiquer avec l'extérieur.

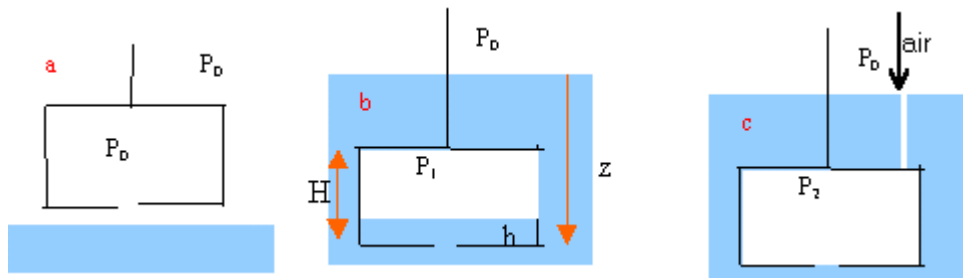
L'air est considéré comme un gaz parfait, sa température garde la même valeur $\theta = 27^\circ\text{C}$ constante dans tous les cas.

La pression de l'atmosphère au-dessus de l'eau est $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa.

On rappelle $g = 9,81$ N. kg⁻¹ ; $R = 8,31$ SI ;

masse volumique de l'eau $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ kg.m⁻³

masse molaire moyenne de l'air: 29 g. mol⁻¹.



1. Le local contenant l'air à la pression p_0 (schéma a) est descendu sous l'eau jusqu'à ce que l'orifice atteigne la profondeur z (schéma b). La hauteur d'eau dans le local est alors $h=1,0$ m. Calculer la pression p_1 de l'air dans le local et la profondeur z .
2. L'orifice du local étant à la profondeur $z = 6,1$ m, on introduit dans le local, grâce à un compresseur, de l'air prélevé dans l'atmosphère extérieure jusqu'à ce que toute l'eau soit chassée du local (schéma c). Calculer la pression p_2 .
3. Calculer la quantité de matière (exprimée en nombre de moles) d'air contenue dans le local dans les 3 cas (a,b,c). En déduire la masse d'air prélevée dans l'atmosphère par le compresseur.

corrigé

équation des gaz parfaits

$$PV = nRT$$

P: pression en Pa

V volume en m³.

n : quantité de matière (mol)

T température en kelvin

R= 8,31 SI = constante

$$n = PV / (RT)$$

$$V=3*15 = 45 \text{ m}^3 ; T= 273+27= 300 \text{ K}$$

$$n = 10^5 * 45 / (8,31 * 300) = \underline{1805 \text{ mol}}.$$

schéma b :

température, quantité de matière restent inchangés.

$$\text{nouveau volume : } 2*15 = 30 \text{ m}^3$$

$$P_1 = 1805 * 8,31 * 300 / 30 = \underline{1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}}.$$

$$P_1 - P_0 = \rho g (z-h) .$$

ρ masse volumique du liquide

z-h (mètre) : différence de niveau entre un point à la surface du liquide dans le caisson et la surface libre du liquide à l'extérieur.

$$z-h = (P_1 - P_0) / (\rho g)$$

$$z-h = 0,5 \cdot 10^5 / (10^3 * 9,8) = 5,1 \text{ m d'où } z = 5,1 + 1 = \underline{6,1 \text{ m}}.$$

$$P_2 - P_0 = \rho g z .$$

$$P_2 = P_0 + \rho g z$$

$$P_2 = 10^5 + 10^3 * 9,8 * 6,1 = \underline{1,597 \cdot 10^5 \text{ Pa}}.$$

la quantité de matière d'air a augmenté.

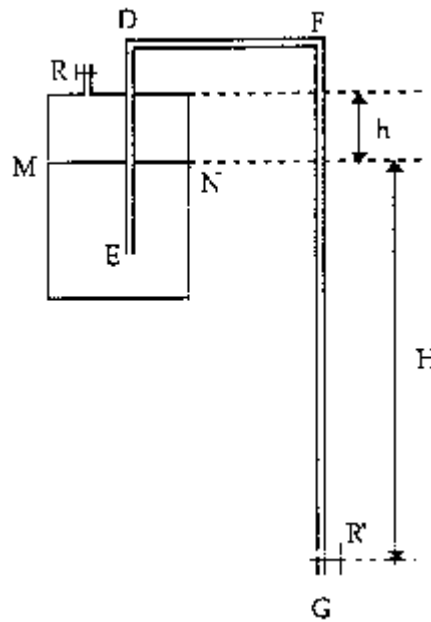
$$n_2 = P_2 V / (RT)$$

$$n_2 = 1,597 \cdot 10^5 \cdot 45 / (8,31 \cdot 300) = 2884 \text{ mol d'air.}$$

$$2884 - 1805 = 1079 \text{ mol d'air}$$

$$\text{masse d'air : } 1079 \cdot 29 = \underline{31,29 \text{ kg}} .$$

II *siphon* 7 points



Un vase cylindrique de section S est fermé à sa partie supérieure par un couvercle plan muni d'un robinet R et laissant passer la branche ED d'un siphon $EDFG$. Ce vase renferme de l'eau dont le niveau MN est à une distance h du couvercle et à une hauteur H au dessus du robinet R' situé à l'extrémité du siphon.

Le siphon étant rempli d'eau, le robinet R' étant fermé, on ouvre un instant le robinet R et on le referme. La pression au dessus du liquide est alors égale à la pression atmosphérique, notée p_{atm} .

On admettra que la section du siphon est négligeable devant celle du vase.

On ouvre le robinet R' et on laisse l'eau s'écouler.

1. L'eau peut cesser de couler avant que le récipient soit vide. Expliquer pourquoi en utilisant le théorème de Bernoulli.
2. Soit x l'abaissement du niveau MN à un instant donné et p la pression de l'air dans la partie supérieure du vase. On suppose la température constante pendant l'écoulement et on considère l'air comme un gaz parfait. Exprimer la pression p en fonction de x , h et p_{atm} .

3. Exprimer lorsque l'eau s'arrête de couler (le robinet R' étant toujours ouvert) la pression p en fonction de x , H , ρ , et p_{atm} . Pour cela on appliquera la relation fondamentale de l'hydrostatique au liquide contenu dans le siphon.

Données : $S = 100 \text{ cm}^2$

$h = 0,10 \text{ m}$,

$H = 2,0 \text{ m}$,

accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m. s}^{-2}$

pression atmosphérique $p_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

masse volumique de l'eau $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

corrigé

au départ (R fermé et R' fermé), le volume d'air enprisonné est Sh , sa pression est p_{atm} et sa température est T .

l'équation des gaz parfait s'écrit : $p_{\text{atm}} Sh = nRT$ (1)

R fermé et R' ouvert, le niveau du liquide dans le vase cylindrique descend de x : le volume de l'air devient alors $S(h+x)$, la pression p , la température ainsi que la quantité de matière d'air n'ont pas changé.

l'équation des gaz parfaits s'écrit : $p S(h+x) = nRT$ (2).

les deux relations ci dessus donnent :

$$p_{\text{atm}} Sh = p S(h+x)$$

$$p = p_{\text{atm}} h / (h+x).$$

$$p = 10^5 * 0,1 / (0,1+x) = 10^4 / (0,1+x).$$

th de Bernoulli

$$p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}.$$

p : pression en pascal

ρ masse volumique du fluide (eau) kg/m^3 .

z altitude en mètre

v : vitesse d'écoulement en m/s .

On choisi l'altitude du point G comme origine des altitudes.

On applique le théorème de Bernoulli entre un point situé à la surface du liquide M et le point G, à la sortie du robinet R'.

la vitesse d'écoulement du liquide en M est voisine de zéro si la section du siphon est petite devant la section S du vase.

$$\text{en M : } p + \rho g (H-x) = \text{constante}$$

$$\text{en G : } p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

$$p + \rho g (H-x) = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \rho v^2 = p - p_{\text{atm}} + \rho g (H-x) = p - 10^5 + 10^4(2-x)$$

$$\text{avec } p = 10^4 / (0,1+x)$$

le liquide ne s'écoule plus lorsque le second membre est nul. ($v=0$) :

$$10^4 / (0,1+x) - 10^5 + 10^4(2-x) = 0$$

réduire au même dénominateur :

$$10^4 - 10^5(0,1+x) + 10^4(2-x) (0,1+x) = 0$$

$$\text{effectuer : } -10^5x + 0,2 \cdot 10^4 - 10^4x^2 + 1,9 \cdot 10^4x = 0$$

$$\text{diviser par } 10^4 : -x^2 - 8,1x + 0,2 = 0$$

$$x^2 + 8,1x - 0,2 = 0$$

$$\text{résoudre : } \Delta = 8,1^2 + 4 \cdot 0,2 = 66,41$$

$$x_1 = (-8,1 + 8,149) / 2 = \underline{0,0245 \text{ m.}}$$

la pression de l'air dans le récipient cylindrique fermé est alors : $p = 10^4 / 0,1245 = \underline{80\,321 \text{ Pa.}}$