

Série n° 4
BCGSem3

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire discrète d'espace échantillonnaire

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soient a et b deux scalaires quelconques, montrer que

- a. $E(aX+b) = aE(X)+b$
- b. $\text{Var}(aX \pm b) = a^2 \text{Var}(X)$.
- c. Interpréter les résultats de a. et b.

Remarque: a et b sont aussi vrais pour X v.a. continue.

Exercice 2:

On lance simultanément deux dés sur une table. L'un est cubique ; ses faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. L'autre est tétraédrique ; ses faces sont numérotées 1, 2, 3, 4. Les deux dés sont homogènes (c'est-à-dire que pour chacun des deux dés, les faces ont la même probabilité d'apparition).

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres figurant sur les deux faces en contact avec la table.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
4. Définir la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.

Exercice 3:

Soit X une variable aléatoire. Montrer que

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2.$$

Exercice 4:

Soit X une variable aléatoire. Si $E(X)=2$ et $\text{Var}(X)=5$, trouver

1. $E[(2 + X)^2]$

2. $\text{Var}[(4 + 3X)]$

Exercice 5:

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit U une variable aléatoire de densité $f(\cdot)$ définie par : $f(x) = c \cdot 1_{[a,b]}(x)$.

1. Calculer c.
2. Donner la fonction de répartition de U.

3. Calculer $P\left(\frac{2a+b}{3} \leq U \leq \frac{a+2b}{3}\right)$.

4. Calculer $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.

Exercice 6 :

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité symétrique et de fonction de répartition $\phi(\cdot)$. Montrer que :

1. $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

2. $P[X > x] = 1 - \phi(x)$

3. $P[a \leq X \leq b] = \phi(b) - \phi(a)$

Exercice 7:

Soit X une variable aléatoire telle que : $X \approx N(\mu, \sigma^2)$. Montrer que $E(X) = \mu$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$.