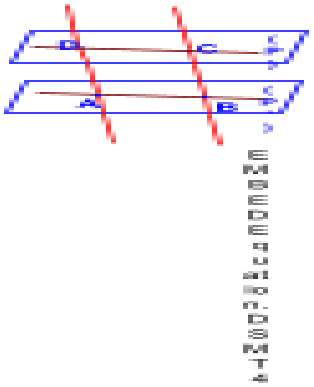
تمرين 4

نعتبر مستقيمين متوازيين تماما (Δ) و (Δ') يقطعان مستويين متوازيين تماما (P) و (P') في أربع نقط A ، B ، C و D .

برهن أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .



الحل :

لدينا (Δ) و (Δ') مستقيمين متوازيين إذن (AD) و (BC) مستقيمين متوازيين ويعينان مستو $(ABCD)$

المستوي $(ABCD)$ يقطع كل من المستويان المتوازيان (P) و (P') في مستقيمين متوازيين وهما (AB) و (DC) .

إذن في المستوي $(ABCD)$ لدينا (AD) // (BC) و (AB) // (DC) ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

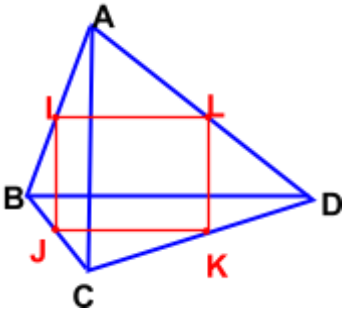
تمرين 5

$ABCD$ رباعي وجوه ؛

I ، J ، K و L منتصفات $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ و $[DA]$ على الترتيب .

1. برهن أن الرباعي $IJKL$ متوازي الأضلاع .
2. النقطتان M و N منتصفا $[AC]$ و $[BD]$ على الترتيب .

برهن أن للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة .



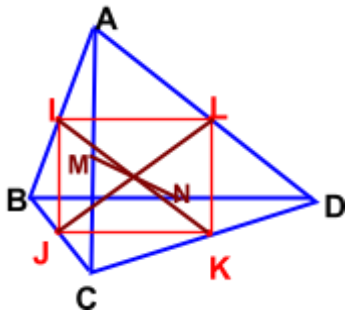
الحل :

1. في المثلث ABC نطبق نتيجة مبرهنة طاليس الخاصة بالمنتصفات ونحصل على $(IJ)//(AC)$ و $AC = 2IJ$.

ونطبق نفس النتيجة في المثلث ACD ونحصل على $(LK)//(AC)$ و $AC = 2LK$.

ومنه : $(IJ)//(LK)$ و $IJ = LK$

بالتالي : المستقيمان (IJ) و (LK) يعينان مستو وهو $(IJKL)$ والرباعي $IJKL$ هو متوازي الأضلاع .



2. من السؤال السابق نستنتج أن القطرين $[IK]$ و $[JL]$ متناصفان .

لنبرهن أن $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان . (أو $[JL]$ و $[MN]$ متناصفان)

بتطبيق نتيجة مبرهنة طاليس في كل من المثلثين ABC و BCD نجد : $(IM)//(BC)$ ، $IM = \frac{1}{2}BC$ و $(NK)//(BC)$ ، $NK = \frac{1}{2}BC$. ومنه : $(IM)//(NK)$ إذن هذين المستقيمين يعينان مستو $(IMKN)$ ولدينا $IM = NK$ وبالتالي الرباعي $IMKN$ متوازي أضلاع ومنه قطريه $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان .

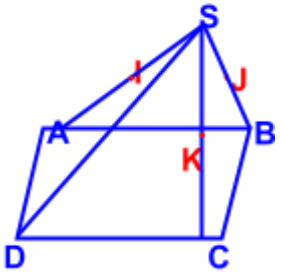
خلاصة القطع $[IK]$ ، $[JL]$ و $[MN]$ لها نفس المنتصف ومنه للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة .

تمرين 6

$ABCD$ متوازي أضلاع في مستو (P) و S نقطة خارج المستوي (P) .

نعين النقط I ، J ، K منتصفات $[SA]$ ، $[SB]$ و $[SC]$ على الترتيب .

1. ما هو تقاطع المستوي (CIJ) مع المستويين (P) و (SDA) ؟
2. برهن أن المستوي (IJK) يقطع القطعة $[SD]$ في منتصفها .



الحل :

1. المستويان (CIJ) و (P) متمايزان ولهما نقطة مشتركة C إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة C .

في المثلث SAB لدينا I و J منتصفي القطعتين $[SA]$ و $[SB]$ على الترتيب إذن حسب نتيجة طاليس (IJ) يوازي (AB) .

في المستوي (P) لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن (AB) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (DC) .

إذن المستقيمين (IJ) و (DC) يعينان مستو الذي هو (CIJ) .

خلاصة : تقاطع المستويين (CIJ) و (P) هو المستقيم (DC) .

نستنتج أن المستوي (CIJ) يشمل النقطتين I و D

بما أن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (SA) فإن I تنتمي إلى المستوي (SDA)

وبالتالي المستويين (CIJ) و (SDA) متمايزان ويشتركان في نقطتين متمايزتين I و D إذن تقاطعهما هو المستقيم (ID) .

2. في ما سبق لدينا (IJ) يوازي (DC) ؛ وفي المثلث SDC نعين L منتصف (SD) وبما أن K منتصف (SC) فإن المستقيم (KL) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (KL) إذن النقطة L تنتمي إلى المستوي (IJK) .

بما أن المستقيم (SD) لا يوازي المستوي (IJK) فإنهما يتقاطعان في نقطة وحيدة وهي L منتصف القطعة $[SD]$.

تمرين 7